

Modélisation et caractérisation d'images cohérentes

Jean Marie Nicolas

Florence Tupin

LTCI, CNRS, Télécom ParisTech, Université Paris-Saclay, 75013, Paris, France

jean-marie.nicolas@telecom-paristech.fr

Résumé

L'imagerie cohérente (radar, sonar, échographie, ...) présente des caractéristiques spécifiques dues au phénomène de chatoiement qui agit comme un bruit multiplicatif. Un cadre formel, celui des **log-statistiques**, permet de mieux caractériser un certain nombre de lois usuelles grâce aux propriétés de la convolution de Mellin. Dans cet article, nous montrons comment le formalisme des fonctions de Meijer peut s'appliquer à ces lois, ce qui permet d'en exprimer les fonctions de répartition : il est alors possible d'en effectuer facilement des simulations. Celles-ci sont illustrées sur un diagramme fondé sur les **log-cumulants**, permettant ainsi de caractériser différentes lois de probabilités aussi bien théoriques qu'empiriques.

Mots Clef

Imagerie cohérente, lois de probabilité, statistiques de Mellin, log-statistiques

Abstract

Coherent imaging (radar, sonar, echography, ...) has some specific characteristics based on speckle phenomenon which acts as multiplicative noise. A formal framework, called **log-statistics**, allows a better analysis of usual probability density functions with the help of Mellin convolution. In this article, we propose to apply the Meijer's functions formalism to these pdf. By this way, cumulative functions can be directly derived so that simulations of such distribution can be achieved. Finally simulations are compared on a specific diagram based on **log-cumulants**.

Keywords

Coherent imaging, density probability functions, Mellin statistics, log-statistics

1 Introduction

Les données d'imagerie cohérente (images échographiques, images radar, images sonar, images laser, ...) présentent des caractéristiques très spécifiques liées aux principes physiques de leur acquisition : la nature même des ondes cohérentes utilisées pour leur construction conduit à un aspect granuleux que l'on caractérise généralement comme un bruit de chatoiement (*speckle*). Ce phénomène s'observe si l'on

considère aussi bien les images en amplitude (module du champ électromagnétique) que les images en intensité (carré du module). Ce "bruit" a une nature multiplicative et fait que ces images ne peuvent être traitées correctement par les outils traditionnels du traitement d'image et de signal qui font le plus souvent l'hypothèse que le bruit est additif.

Dans le cas d'une image acquise sur une zone homogène (tant surfacique en imagerie radar que volumique en imagerie acoustique), le modèle le mieux adapté est le "chatoiement pleinement développé" de Goodman [4]. En faisant l'hypothèse réaliste qu'il existe dans la cellule de résolution un très grand nombre de cibles ponctuelles, Goodman montre que la densité de probabilité que suit l'image s'identifie à une loi Gamma, qui est une extension de la loi exponentielle décroissante. En faisant l'hypothèse qu'il existe sur la zone imagée une texture sous-jacente, et dans le cas où cette texture peut elle aussi se modéliser par une loi Gamma, Goodman montre que l'image suit alors une loi K, ce que les spécialistes du radar savent depuis les travaux de Jakeman [5]. Beaucoup d'autres hypothèses, tant expérimentales que mathématiques, débouchent sur un grand nombre de lois souvent connues du monde des statistiques (loi de Fisher, loi Gamma Généralisée, loi Beta, ...) et il devient alors difficile d'évaluer objectivement les avantages et inconvénients d'une approche donnée dans cette profusion de lois possibles. De surcroît, certaines de ces lois présentent des caractéristiques parfois désagréables comme celle de ne posséder qu'un nombre limité de moments liée à un caractère de "queue lourde", indispensable pour prendre en compte les "outliers".

Un cadre mathématique existe : celui des **log-statistiques**, appelées aussi **statistiques de Mellin**, proposé au congrès RFIA2000 [6] et fondé sur la transformée de Mellin [7], moins connue que la transformée de Fourier mais dotée elle aussi de tables [9]. Outre l'avantage qu'il permet de définir, à côté des moments et cumulants traditionnels, les **log-moments** et les **log-cumulants** – toujours définis même pour les lois à queue lourde –, il permet aussi de construire, grâce à la convolution de Mellin, des familles de lois dans lesquelles on retrouve quasiment toutes les lois proposées dans la littérature.

Cette modélisation permet une approche unifiée pour la construction des lois usuelles, mais aussi une écriture unifiée si l'on se place dans le formalisme des fonctions de Meijer ([1], chapitre 5).

L'objectif de ce travail est de replacer les lois usuelles dans le cadre des log-statistiques et du formalisme des fonctions de Meijer, et de les comparer dans trois diagrammes de représentation : le diagramme $\beta_1 - \beta_2$ (voir par exemple [10]), le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ beaucoup mieux adapté aux lois à queue lourde, et enfin un diagramme méconnu, $\mu_A - \mu_G$, liant moyenne géométrique et moyenne arithmétique.

2 Les log-statistiques

Nous donnons succinctement ici certains concepts fondamentaux des log-statistiques qui nous seront nécessaires par la suite (voir [6, 7] pour plus de détails).

2.1 Définition

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles positives telle que sa densité de probabilité (d.d.p.) $p(x)$ soit définie pour $x \in \mathbb{R}^+$.

Traditionnellement, on lui associe sa fonction caractéristique, définie grâce à la Transformée de Fourier, qui, si celle-ci existe, s'écrit :

$$\Phi_X(v) = \mathcal{F}[p(x)](v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jvx} p(x) dx,$$

Puisque la loi n'est définie que sur \mathbb{R}^+ , on définit alors sa fonction caractéristique de deuxième espèce comme sa transformée de Mellin, la variable s étant un complexe :

$$\phi_X(s) = \mathcal{M}[p(x)](s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} p(x) dx$$

On reconnaît dans cette expression la fonction génératrice des moments si l'on prend pour s une valeur réelle. On peut surtout, en copiant la démarche des statistiques traditionnelles, définir le **log-moment** d'ordre ν , qui, en prenant en compte les propriétés de la transformation de Mellin, s'écrit :

$$\tilde{m}_\nu = \left. \frac{d^\nu \phi_X(s)}{ds^\nu} \right|_{s=1} = \int_0^{+\infty} (\log x)^\nu p(x) dx$$

On démontre l'existence de ces log-moments dans la quasi totalité des lois usuelles [7], ce qui permet au passage de définir le **log-cumulant** d'ordre n par dérivation logarithmique de la fonction caractéristique de deuxième espèce :

$$\tilde{\kappa}_n = \left. \frac{d^n \log(\phi_X(s))}{ds^n} \right|_{s=1}$$

Enfin, connaissant la fonction caractéristique de deuxième espèce, la transformée de Mellin inverse permet de donner une expression analytique à la loi de probabilité :

$$p(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \phi_X(s) ds \quad (1)$$

dans la mesure où c appartient à la bande dans laquelle la transformée de Mellin est définie (i.e. c appartient à un voisinage de 1).

Achevons cette brève introduction sur deux propriétés qui seront essentielles dans ce travail :

- en rappelant la définition de la convolution de Mellin, notée $\hat{\star}$, qui, à l'instar de la convolution vis à vis de la transformée de Fourier, vérifie l'expression :

$$\begin{aligned} p(x) &= q(x) \hat{\star} r(x) \\ \Leftrightarrow \mathcal{M}[p(x)] &= \mathcal{M}[q(x)] \mathcal{M}[r(x)] \end{aligned}$$

ce qui conduit à une propriété additive pour les log-cumulants : $\tilde{\kappa}_{p,n} = \tilde{\kappa}_{q,n} + \tilde{\kappa}_{r,n}$

- en rappelant que, connaissant la fonction caractéristique de deuxième espèce d'une loi $p(x) : \phi_X(s)$, et en considérant la variable aléatoire Y telle que $Y = \frac{1}{X}$, la loi inverse $q(y)$ a pour fonction caractéristique de deuxième espèce $\phi_Y(s) = \phi_X(2-s)$.

2.2 Application aux lois usuelles

En partant du formalisme des log-statistiques, nous allons montrer comment les lois usuelles de l'imagerie cohérente se formulent à l'aide de fonctions de Meijer (leurs définitions et propriétés étant rappelées en annexe A).

Exemple de la loi Gamma. Les log-statistiques n'auraient qu'un rôle anecdotique si les lois usuelles n'avaient pas le bon goût de s'exprimer sous des formes analytiques conduisant dans l'univers de Mellin à des fonctions Gamma. Dans le domaine de l'imagerie cohérente, la "loi de base" est la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$:

$$\mathcal{G}[\mu, L](x) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lx}{\mu} \right)^{L-1} e^{-\frac{Lx}{\mu}} \quad (2)$$

dont la fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit (grâce à la table de transformée de Mellin [9]) :

$$\phi_X(s) = \left(\frac{\mu}{L} \right)^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{\Gamma(L)} \quad (3)$$

Par dérivation, s'en déduisent les expressions des log-cumulants :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 &= \log\left(\frac{\mu}{L}\right) + \Psi(L) \\ \tilde{\kappa}_n &= \Psi(n-1, L) \quad \forall n > 1 \end{cases}$$

où $\Psi(L)$ est la fonction Digamma et $\Psi(p, L)$ la fonction polygamma d'ordre p .

Connaissant sa transformée de Mellin, cette loi Gamma peut aussi s'écrire (relation 1) :

$$\mathcal{G}[\mu, L](x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \left(\frac{\mu}{L} \right)^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{\Gamma(L)} ds$$

et on reconnaît dans cette expression un exemple de fonction de Meijer [1], ce qui permet aisément d'écrire :

$$\mathcal{G}[\mu, L](x) = \frac{L}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)} \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(\frac{Lx}{\mu} \middle| \begin{matrix} \cdot & ; & \cdot \\ L-1 & ; & \cdot \end{matrix} \right)$$

L'intérêt de cette nouvelle expression réside dans le fait que la primitive d'une fonction de Meijer s'exprime sous forme d'une fonction de Meijer (voir annexe A). Cette propriété permet alors de déduire aisément la fonction de répartition de la loi Gamma qui s'écrit sous la forme d'une fonction de Meijer :

$$F_G(x) = \frac{1}{\Gamma(L)} \overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(\frac{Lx}{\mu} \middle| \begin{matrix} 1 & ; & \cdot \\ L & ; & 0 \end{matrix} \right)$$

Notons au passage que le cas $L = 1$ donne une loi bien connue : l'exponentielle décroissante.

Exemple de la loi Gamma Inverse. Grâce aux propriétés des log-statistiques vis à vis des lois inverses, il est très facile, connaissant une loi s'exprimant dans le formalisme d'une fonction de Meijer, d'en déduire directement l'expression de sa loi inverse sous forme de fonction de Meijer. On montre alors que la loi Gamma Inverse $\mathcal{GI}[\mu, M]$ peut s'écrire ainsi :

$$\mathcal{GI}[\mu, M](x) = \frac{1}{M\mu} \frac{1}{\Gamma(M)} \overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(\frac{x}{M\mu} \middle| \begin{matrix} -M & ; & \cdot \\ \cdot & ; & \cdot \end{matrix} \right)$$

ce qui permet d'en déduire la fonction de répartition :

$$F_{\mathcal{GI}}(x) = \frac{1}{\Gamma(M)} \overline{G}_{2,1}^{0,2} \left(\frac{x}{M\mu} \middle| \begin{matrix} 1, -M+1 & ; & \cdot \\ \cdot & ; & 0 \end{matrix} \right)$$

Exemples de la loi K et de la loi de Fisher.

Lorsque Goodman envisage le cas du "compound speckle", il suppose que le chatoisement est localement modifié par une texture sous-jacente suivant une loi Gamma. Dans le formalisme des log-statistiques, cela revient à effectuer une convolution de Mellin entre la loi Gamma spécifique au chatoisement et la loi Gamma spécifique à la texture, ce qui se traduit par un simple produit des fonctions caractéristiques de deuxième espèce. Dans ce cas on retrouve directement la loi K [6].

Le formalisme de Meijer est encore plus surprenant puisqu'il est très facile de montrer que :

$$\begin{aligned} \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \middle| \begin{matrix} \cdot & ; & \cdot \\ L-1 & ; & \cdot \end{matrix} \right) & \star \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(Mx \middle| \begin{matrix} \cdot & ; & \cdot \\ M-1 & ; & \cdot \end{matrix} \right) \\ & = \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \middle| \begin{matrix} \cdot & ; & \cdot \\ L-1, M-1 & ; & \cdot \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

ce qui permet une expression nouvelle de la loi K sous forme de fonction de Meijer et d'en déduire par intégration la fonction de répartition :

$$F_K(x) = \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \overline{G}_{1,3}^{2,1} \left(\frac{LMx}{\mu} \middle| \begin{matrix} 1 & ; & \cdot \\ L, M & ; & 0 \end{matrix} \right)$$

En faisant l'hypothèse que la texture sous-jacente suit une loi Gamma Inverse, on trouve alors une loi de Fisher [7]. En utilisant le formalisme des fonctions de Meijer, on va avoir :

$$\begin{aligned} \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(x \middle| \begin{matrix} \cdot & ; & \cdot \\ L-1 & ; & \cdot \end{matrix} \right) & \star \overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(x \middle| \begin{matrix} -M & ; & \cdot \\ \cdot & ; & \cdot \end{matrix} \right) \\ & = \overline{G}_{1,1}^{1,1} \left(x \middle| \begin{matrix} \cdot & ; & -M \\ L-1 & ; & \cdot \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

ce qui permet une expression nouvelle de la loi de Fisher sous forme de fonction de Meijer :

$$\mathcal{F}[\mu, L, M](x) = \frac{L}{M\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \overline{G}_{1,1}^{1,1} \left(\frac{Lx}{M\mu} \middle| \begin{matrix} -M & ; & \cdot \\ L-1 & ; & \cdot \end{matrix} \right) \quad (4)$$

Par intégration, on obtient sa fonction de répartition :

$$F_{\mathcal{F}}(x) = \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \overline{G}_{2,2}^{1,2} \left(\frac{Lx}{M\mu} \middle| \begin{matrix} 1, -M+1 & ; & \cdot \\ L & ; & 0 \end{matrix} \right)$$

Le cas des lois généralisées. Parmi les démarches effectuées dans l'adaptation de lois simples à des problèmes divers, la généralisation des lois est une étape assez familière : elle consiste à considérer une puissance de la variable au lieu de considérer la variable elle-même. Changer la puissance de la variable est une démarche souvent utilisée en imagerie radar puisque, selon les traitements, on utilise les lois d'une image d'amplitude (la plus simple étant la loi de Rayleigh) ou les lois d'une image en intensité (la plus simple étant l'exponentielle décroissante).

L'exemple le plus simple de généralisation conduit à la célèbre loi de Weibull, qui n'est rien d'autre que la généralisation de la loi exponentielle décroissante.

Le contexte des log-statistiques est très bien adapté à un changement de puissance de la variable. En effet, soit une grandeur x suivant la loi $p(x)$. Soit une nouvelle variable y telle que $y = x^\eta$. Soit $p_\eta(x)$ la loi de probabilité correspondant à cette nouvelle variable, et $\phi_\eta(s)$ sa fonction caractéristique de deuxième espèce. On a alors les relations fondamentales :

$$\begin{aligned} p_\eta(x) & = |\eta| x^{(\eta-1)} p(x^\eta) \\ \phi_\eta(s) & = \phi_p \left(\frac{s + \eta - 1}{\eta} \right) \end{aligned}$$

et on en déduit directement les log-cumulants :

$$\tilde{\kappa}_{p_\eta, n} = \left(\frac{1}{\eta} \right)^n \tilde{\kappa}_{p, n}$$

Le formalisme des fonctions de Meijer permet lui aussi un passage aisé d'une loi à sa loi généralisée. Dans le cas de la loi Gamma on obtient la loi Gamma Généralisée, actuellement d'un usage courant en imagerie radar. Son expression sous forme de fonction de Meijer s'écrit :

$$\mathcal{GG}[\mu, L, \eta](x) = \frac{\eta L^{\frac{1}{\eta}}}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)} \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu} \right)^\eta \middle| \begin{matrix} \cdot & ; & \cdot \\ L - \frac{1}{\eta} & ; & \cdot \end{matrix} \right)$$

En complément, donnons ici l'exemple de la loi de Fisher généralisée. La loi de Fisher étant donnée par la relation 4, sa loi généralisée s'écrit :

$$\mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta](x) = \frac{\eta}{\mu} \left(\frac{L}{M} \right)^{\frac{1}{\eta}} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \overline{G}_{1,1}^{1,1} \left(\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{M^{\frac{1}{\eta}} \mu} \right)^\eta \middle| \begin{matrix} -M+1 - \frac{1}{\eta} & ; & \cdot \\ L - \frac{1}{\eta} & ; & \cdot \end{matrix} \right) \quad (5)$$

Sur ces deux exemples, on voit qu'il est alors aisé d'en déduire la fonction de répartition.

Loi Gamma L=1.5

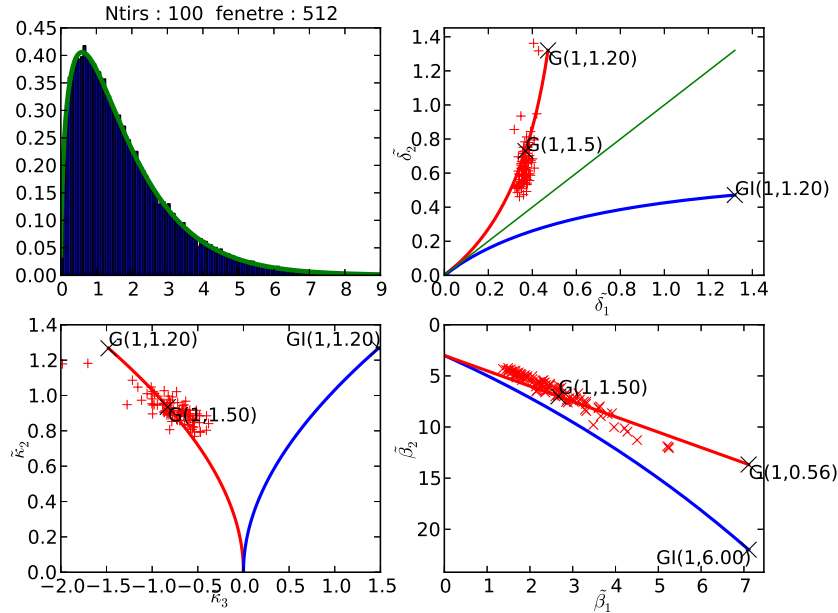


FIGURE 1 – Diagrammes $\mu_A - \mu_G$ (en haut à droite), $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ (en bas à gauche) et $\beta_1 - \beta_2$ (en bas à droite) pour la simulation d’une loi Gamma avec $L = 1.5$ (histogramme empirique et loi estimée en haut à gauche). Sur chaque diagramme est placée la branche de la loi Gamma (à gauche pour les diagrammes $\mu_A - \mu_G$ et $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$, en haut pour le diagramme $\beta_1 - \beta_2$) et celle de la loi Gamma Inverse (à droite pour les diagrammes $\mu_A - \mu_G$ et $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$, en bas pour le diagramme $\beta_1 - \beta_2$). L’estimation des paramètres est faite sur une fenêtre de 512 valeurs. Chaque point, marqué par une croix, correspond à une estimation des paramètres. On note que le nuage de ces points est correctement localisé pour le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ et le diagramme $\mu_A - \mu_G$; en revanche, pour le diagramme classique $\beta_1 - \beta_2$, le nuage est assez délocalisé.

Loi Fisher L=4.0 M=2.9

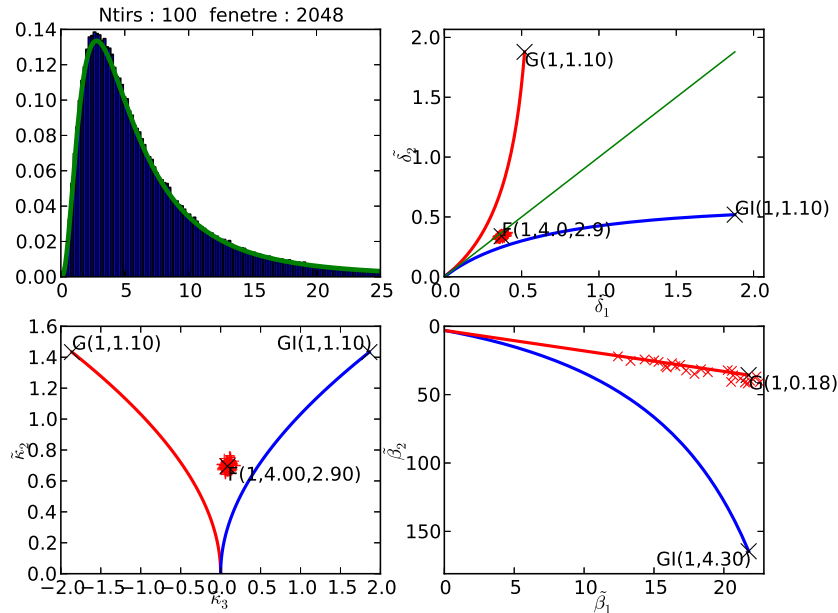


FIGURE 2 – Diagrammes pour une simulation d’une loi de Fisher avec $L = 4.$ et $M = 2.9.$ C’est une loi à queue lourde puisque ses moments d’ordre supérieur ou égal à 2.9 ne sont pas définis. La localisation est toujours assurée pour les diagrammes $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ et $\mu_A - \mu_G$. En revanche, pour le diagramme $\beta_1 - \beta_2$ dans lequel la position théorique n’existe pas, si les moments empiriques peuvent toujours se calculer, le nuage de points sort du diagramme proposé (déjà limité à droite par la loi Gamma $L = 0.18$ en haut, et la loi Gamma Inverse $L = 4.3$ en bas).

3 Application à la caractérisation d'images en imagerie cohérente

3.1 Les diagrammes de représentation

Si le chatoiement pleinement développé est un modèle à la fois réaliste et justifié pour des images acquises sur des zones homogènes, un certain empirisme règne dès lors que les hypothèses de Goodman ne sont plus applicables. Ceci explique l'apparition d'un grand nombre de lois possibles et la complexité des catalogues existants sur les lois (voir par exemple [3]). Comparer de telles lois est alors une tâche redoutable et cette démarche doit se mener tant sur le plan théorique qu'empirique lorsque l'on dispose d'un jeu de données.

Le monde des statistiques a proposé depuis longtemps le diagramme $\beta_1 - \beta_2$ (voir par exemple [10]) défini par :

$$\beta_1 = \frac{M_3^2}{M_2^3} \quad \beta_2 = \frac{M_4}{M_2^2}$$

(M_2, M_3 et M_4 étant les moments centrés d'ordre 2, 3 et 4), β_1 correspondant à l'axe des abscisses et β_2 l'axe des ordonnées. Cependant, les lois à queue lourdes ne peuvent être théoriquement représentées dans ce diagramme (c'est le cas des lois de Fisher avec $M \leq 4$).

Les log-statistiques proposent le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$, avec $\tilde{\kappa}_2$ correspondant à l'axe des ordonnées et $\tilde{\kappa}_3$ l'axe des abscisses [7]. On montre que dans ce diagramme toutes les lois exprimables sous forme de fonction de Meijer peuvent se représenter.

Enfin, notons que certaines communautés scientifiques [2] utilisent un diagramme mettant en jeu moyenne géométrique g , moyenne harmonique h et moyenne arithmétique m . Ce diagramme place alors $\log(\frac{m}{g})$ en abscisse et $\log(\frac{g}{h})$ en ordonnée. Dans cet article, nous l'appellerons diagramme $\mu_A - \mu_G$.

La comparaison de ces trois diagrammes est proposée figure 1 sur une simulation de la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$ avec $L = 1.5$ (grâce à la connaissance de sa fonction de répartition obtenue sous forme de fonctions de Meijer). On peut remarquer que pour la même taille d'échantillons (512), le diagramme "classique" $\beta_1 - \beta_2$ est celui qui présente la plus grande dispersion de son nuage de points.

On peut aussi, grâce à la connaissance de sa fonction de répartition sous forme de fonction de Meijer, simuler une loi de Fisher "à queue lourde" : la figure 2 montre les nuages de points dans les trois diagrammes de la loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu, L, M]$ avec $L = 4$ et $M = 2.9$. Cette loi ne possédant pas ses moments d'ordre supérieur ou égal à 2.9, il est intéressant de constater que le nuage de points dans le diagramme $\beta_1 - \beta_2$ n'a plus aucune signification, puisque les moments d'ordre 3 et 4 nécessaires au calcul des coefficients β_1 et β_2 n'existent pas, mais ce qui n'empêche pas le calcul, connaissant des valeurs tirées de cette

loi (les tirages étant bornés, rien n'empêche les calculs empiriques).

3.2 Simulation et comparaisons

Grâce à l'approche jointe des log-statistiques et des fonctions de Meijer (actuellement définies en Matlab ou Python), il est possible de comparer différentes lois de probabilité dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$, qui semble bien adapté aux lois utilisées en imagerie cohérente.

La figure 3 propose ainsi différentes lois de probabilités, couramment utilisées dans diverses thématiques et dont les nuages ont été réalisés avec le même nombre de tirages sur des fenêtres de même taille (1024 échantillons). Sont ainsi représentées une loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$ avec $L = 3$, une loi K $\mathcal{K}[\mu, L, M]$ avec $L = 2$ et $M = 3.7$, une loi K Inverse $\mathcal{KI}[\mu, L, M]$ avec $L = 3$ et $M = 3.7$, une loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu, L, M]$ avec $L = 3$ et $M = 1.7$, une loi Gamma Généralisée $\mathcal{GG}[\mu, L, \eta]$ avec $L = 4.5$ et $\eta = 0.4$, une loi Beta $\mathcal{B}[\mu, L, M]$ avec $L = 1$ et $M = 2.5$, et enfin une loi Beta Inverse $\mathcal{BI}[\mu, L, M]$ avec $L = 1$ et $M = 2.6$.

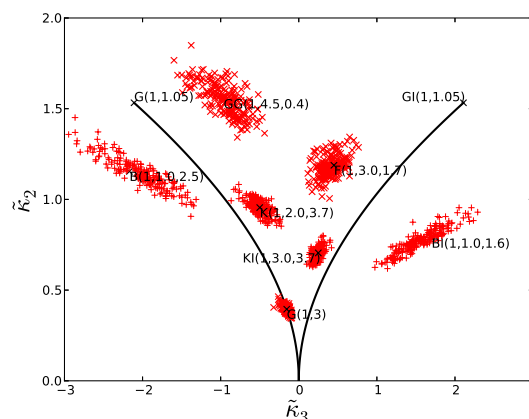


FIGURE 3 – Diagrammes $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ pour différentes lois usuelles définies sur \mathbb{R}^+ .

Cette analyse montre comment un grand nombre de lois usuelles peuvent être comparées dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$. Il existe un lien entre les paramètres des lois et cette position dans ce diagramme tout en rappelant que deux lois ne peuvent être déclarées identiques que si tous leurs log-cumulants sont identiques. Néanmoins, on peut envisager un simple usage de ces deux log-cumulants – par exemple dans un problème de classification – plutôt que l'utilisation des paramètres de lois estimées, le choix de ces lois relevant parfois de traditions spécifiques à la thématique abordée. La figure 4 montre, sur des données extraites d'une image radar (capteur Terrasar-X, données *Spotlight*, résolution métrique) comment zone homogène et zone fortement hétérogène occupent des parties différentes du diagramme et peuvent ainsi être segmentées sans pour autant leur attribuer une loi spécifique.

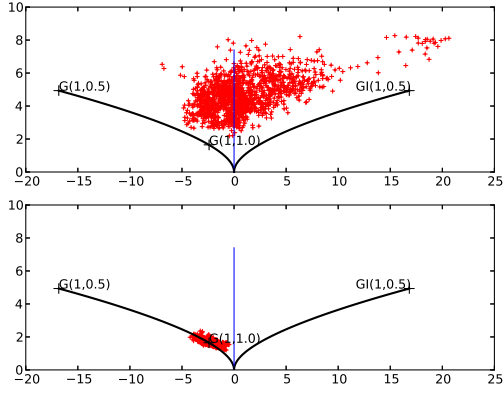


FIGURE 4 – Diagrammes $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ sur deux zones d’une image TerraSar-X de San Francisco. En bas, une zone homogène correspondant à la mer : le chaotisme suit le modèle de Goodman et le nuage est centré autour de la loi Gamma avec $L = 1$. En haut, zone correspondant à des bateaux : la texture est fortement inhomogène et le nuage se trouve dans une autre partie du diagramme.

4 Conclusions

Les lois de l’imagerie cohérente ont beaucoup bénéficié de l’approche des log-statistiques et des propriétés de la transformée de Mellin. Nous avons montré dans cet article que le passage par des fonctions de Meijer permettait une manipulation plus simple des densités de probabilité usuelles en imagerie cohérente. Dans la mesure où cette approche est bien adaptée aux lois à queue lourde, on peut penser que d’autres domaines scientifiques pourraient aussi utiliser cette approche. Par exemple, la loi “Student-t”, s’exprime aussi à l’aide d’une fonction de Meijer car on peut la réécrire comme une loi de Fisher Généralisée (relation 5) :

$$\begin{aligned} p_{Student-t}[\nu](x) &= \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\frac{\nu}{2})\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}} \\ &= \mathcal{FG}[\mu = 1, L = \frac{1}{2}, M = \frac{\nu}{2}, \eta = 2] \end{aligned}$$

ce qui permet d’en déduire la fonction de répartition comme une simple fonction de Meijer et par conséquent d’en permettre des simulations.

A Les fonctions de Meijer

Par définition, une fonction sur \mathbb{R}^+ est une fonction de Meijer si elle s’exprime sous la forme d’une intégrale de Barnes [1] :

$$\begin{aligned} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n ; a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m ; b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \\ \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j+s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1-a_j-s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1-b_j-s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j+s)} x^{-s} ds \end{aligned}$$

et qui est en pratique une transformée de Mellin inverse. Si cette fonction est une densité de probabilité,

l’intégrale doit exister pour $c = 1$. Pour permettre une transcription plus aisée en Maple ou en Python, des séparateurs “;” ont été ajoutés à la notation traditionnelle.

La dérivation d’une telle fonction (voir [1] ou [8]) donne à nouveau une fonction de Meijer, et plusieurs expressions coexistent. Pour les lois de probabilités, on peut privilégier l’expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n ; a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m ; b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ = \overline{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(x \left| \begin{array}{l} -1, a_1 - 1, \dots, a_n - 1 ; \\ b_1 - 1, \dots, b_m - 1 ; \\ a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ 0, b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

De même l’intégration donne une fonction de Meijer et on peut privilégier, dans le monde des log-statistiques, l’expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \overline{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(x \left| \begin{array}{l} 1, a_1 + 1, \dots, a_n + 1 ; \\ b_1 + 1, \dots, b_m + 1 ; \\ a_{n+1} + 1, \dots, a_p + 1 \\ 0, b_{m+1} + 1, \dots, b_q + 1 \end{array} \right. \right) \\ = \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n ; a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m ; b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

Références

- [1] H. Bateman *Higher transcendental functions : Volume I* McGraw-Hill, 1953
- [2] B. Bobee, L. Perreault *Two kinds of moment ratio diagrams and their applications in hydrology* Stochastic Hydrology and Hydraulics, vol 7 (1993), 41-65
- [3] G. Crooks *The Amoroso Distribution* <http://arxiv.org/abs/1005.3274v1>, mai 2010
- [4] J.W. Goodman *Speckle phenomena in optics : Theory and applications..* Roberts & Company, 2007.
- [5] E. Jakeman, N. Pusey *A model for non Rayleigh sea echo*, IEEE Trans. on AP, Vol 24, no 6, 1976, pp 806-814.
- [6] JM Nicolas, A. Maruani, R. Badeau *Les moments d’ordre inférieur : Principes et application au filtrage des images RSO* RFIA2000, Paris, janvier 2000
- [7] J-M Nicolas, *Introduction aux statistiques de deuxième espèce : applications des logs-moments et des logs-cumulants à l’analyse des lois d’images radar*, Traitement du signal, vol 19, No 3, pp 139–167, 2002.
- [8] J-M Nicolas, *Les distributions de Meijer et leurs propriétés en statistiques de Mellin*, Rapport Télécom ParisTech 2001D002, 2011.
- [9] F. Oberhettinger, *Tables of Mellin Transform*, Springer Verlag, 1974
- [10] A.Stuart, J.Keith *Kendall’s Advanced Theory of Statistics, Vol.1 Distribution Theory* Griffin, 1987 (Fifth edition)