

Calcul variationnel des dérivées d'une image et application à l'estimation du flot optique et du flot de scène

Y. Mathlouthi¹

A. Mitiche¹

I. Ben Ayed²

¹ Institut National de la Recherche Scientifique (INRS-EMT), Montréal, QC, Canada

² École de Technologie Supérieure (ETS), Montréal, QC, Canada

mathlouthi@emt.inrs.ca

Résumé

En vision par ordinateur, les dérivées spatiotemporelles d'une image sont généralement calculées par une somme locale de différences finies de l'image, ce qui peut donner des valeurs peu précises et sujettes au bruit dans l'image. Une méthode variationnelle peut cependant calculer des dérivées beaucoup plus précises, qui seraient non seulement conformes à l'image globalement, mais qui seraient aussi régularisées en conférant des propriétés à leurs variations. Dans cet article on propose une telle méthode variationnelle, et on étudie son impact dans la résolution de deux problèmes importants en analyse du mouvement dans des séquences d'images : calcul du flot optique et calcul du flot de scène. La fonctionnelle objectif contient un terme d'adéquation des dérivées à l'image et un terme de régularisation par lissage. Le terme des données utilise un opérateur d'anti-différentiation qui contraint une dérivée à une fonction qui redonne l'image lorsqu'on l'intègre. La discrétisation des équations d'Euler-Lagrange donne un système creux d'équations linéaires de grande taille qui peut se résoudre facilement par la méthode de Gauss-Seidel. Nous donnons des résultats, qualitatifs et quantitatifs, de plusieurs tests, avec des images synthétiques et réelles, qui montrent que les flots optiques et les flots de scènes calculés avec des dérivées résultant de la méthode de différentiation régularisée sont plus précis que ceux obtenus lorsque ces dérivées sont calculées localement par une moyenne de différences finies.

Mots Clefs

Dérivées d'une image, Méthode variationnelle, flot optique, flot de scène.

Abstract

In computer vision, image derivatives are generally computed by local averaging of finite image differences. This paper describes a variational method of regularized differentiation to estimate the partial derivatives of an image, with an application to two important motion analysis problems : optical flow and scene flow estimation. This variational method minimizes a functional composed of an

anti-differentiation data conformity term, and a classic smoothness regularization term. The data term constrains a derivative to be a function which, when integrated, produces the image. Discretization of the corresponding Euler-Lagrange equations yields a large scale sparse system of linear equations, which can be efficiently solved by an iterative method such as Gauss-Seidel. We ran qualitative and quantitative experiments, using real and synthetic images, which show that optical flow and scene flow obtained with image derivatives computed by regularized differentiation are more accurate than those obtained using standard derivative definitions by finite difference averaging.

Keywords

Image derivatives, variational formulation, optical flow, scene flow.

1 Introduction

On retrouve les dérivées de l'image dans beaucoup de problèmes importants en vision par ordinateur [1–5], par exemple en analyse du mouvement dans des séquences d'images [6–9]. Ces dérivées sont souvent estimées localement par une moyenne de différences finies de l'image [1–3, 7, 9], par exemple [8] :

$$\begin{aligned} I_x(r, c) &\approx \frac{1}{4} \sum_{\Delta r=0}^1 \{ I_0(r + \Delta r, c + 1) - I_0(r + \Delta r, c) \\ &\quad + I_1(r + \Delta r, c + 1) - I_1(r + \Delta r, c) \} \\ I_y(r, c) &\approx \frac{1}{4} \sum_{\Delta c=0}^1 \{ I_0(r + 1, c + \Delta c) - I_0(r, c + \Delta c) \\ &\quad + I_1(r + 1, c + \Delta c) - I_1(r, c + \Delta c) \} \\ I_t(r, c) &\approx \frac{1}{4} \sum_{\Delta r=0}^1 \sum_{\Delta c=0}^1 \{ I_1(r + \Delta r, c + \Delta c) \\ &\quad - I_0(r + \Delta r, c + \Delta c) \}, \end{aligned} \quad (1)$$

où I_x, I_y et I_t sont les dérivées spatiotemporelles de l'image I ; $\Delta r, \Delta c$ sont les déplacements selon la ligne r et la colonne c ; I_0 et I_1 sont les trames courante et suivante

utilisées. L'approximation locale de la dérivée d'une fonction par des différences finies est un problème mal posé parce que de petites perturbations de la fonction peuvent causer des changements importants quelconques de la dérivée [10–12]. Par conséquent, le bruit dans une image peut sérieusement affecter la qualité des traitements qui utilisent ces approximations. L'amélioration des filtres a fait l'objet de plusieurs études comme dans [13–16], cependant, le pré-traitement d'image par des filtres ne convient généralement pas [12].

Plusieurs études ont abordé le problème de l'approximation variationnelle de la dérivée d'une fonction d'une variable réelle à partir de valeurs discrètes de la fonction [12, 17, 18]. La fonction dérivée y apparaît explicitement comme variable, sujette à une contrainte de fidélité aux données de la fonction pour laquelle on la calcule, ainsi qu'à une contrainte de régularisation qui lui confère une propriété comme la régularité. Dans [12, 17], le terme de fidélité aux données utilise l'opérateur d'anti-différentiation, selon lequel la dérivée d'une fonction lorsque intégrée produit la fonction. Le terme de régularisation contraint la dérivée à être une fonction lisse dans [17] (régularisation Tikhonov), et lisse tout en respectant les discontinuités dans [12]. (régularisation Tikhonov), et lisse tout en respectant les discontinuités dans [12] (régularisation par variation totale). Tout en étant différente, la fonctionnelle dans [18] s'établit selon un raisonnement similaire. Le terme de fidélité aux données contraint l'approximation de la dérivée à être conforme aux valeurs données de la fonction. La régularisation la contraint à être lisse via la dérivée seconde de la fonction, ce qui en pratique aboutit à l'usage de splines. Les expériences de [12], suivant une implantation standard [19], montrent bien la supériorité de la méthode variationnelle sur la méthode locale de différences finies. Elles confirment les avantages de la différenciation variationnelle régularisée : (a) un débruitage initial de la fonction n'est ni nécessaire ni utile, (b) elle évite l'amplification du bruit, typique aux méthodes des différences finies, (c) elle contrôle d'une façon logique la régularité et le lissage des dérivées. Selon le meilleur de nos connaissances, la différenciation régularisée n'a pas été étudiée dans les problèmes et les applications d'images 2D/3D, et les études numériques liées à la différenciation n'ont été énoncées que pour les fonctions réelles à une variable réelle [12, 20–23].

Dans cet article, nous formulons le problème de l'estimation variationnelle par anti-différenciation des dérivées d'une image, une généralisation à deux dimensions du problème abordé dans [12]. Nous étudions ensuite l'impact de la méthode développée dans la résolution de deux problèmes importants en analyse du mouvement dans des séquences d'images : *calcul du flot optique* (2D) tel que formulé dans [8] et *calcul du flot de scène* (3D) tel que formulé dans [9]. La fonctionnelle objectif d'approximation d'une dérivée de l'image contient deux termes : un terme de fidélité à l'image qui s'appuie sur une définition par anti-différenciation d'une dérivée, et un terme de régula-

risation pour contraindre la dérivée à être lisse. Les équations d'Euler-Lagrange sont développées. Leur discrétisation donne lieu à un grand système creux d'équations linéaires que l'on peut résoudre simplement par la méthode de Gauss-Seidel. Les tests pour le calcul du flot optique utilisent la base de données *Middlebury*. Ceux pour le calcul du flot de scène utilisent des séquences d'images synthétiques et réelles de [9]. Pour les deux applications, les résultats sont bien meilleurs lorsqu'on utilise des dérivées image calculées par la formulation variationnelle régularisée que lorsqu'elles sont calculées par une fonction locale de différences finies de l'image comme cela se fait habituellement.

2 Formulation

Soit $I : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction image. Soit I_x et I_y ses dérivées spatiales. On décrit la méthode d'estimation de I_x . L'estimation de I_y s'obtient de la même façon mais appliquée à la transposée de l'image.

On minimise la fonctionnelle suivante par rapport à une fonction f qui représente la dérivée :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\|Af - I\|^2 + \beta \|\nabla f\|^2) dx dy, \quad (2)$$

où A est l'opérateur d'anti-différenciation par rapport à x :

$$Af(x, y) = \int_0^x f(z, y) dz, \quad (3)$$

où β est une constante positive qui contrôle la contribution du terme de régularisation et $\nabla f = (f_x, f_y)$ est le gradient de f . Les équations d'Euler-Lagrange correspondantes sont [6] :

$$A^*(Af - I) - \beta \nabla^2 f = 0, \quad (4)$$

avec A^* est l'opérateur adjoint de A :

$$A^*f(x, y) = \int_x^l f(z, y) dz. \quad (5)$$

On échantillonne Ω selon une grille régulière et on énumère les points de haut en bas et de gauche à droite pour obtenir un vecteur de dimension $N = n^2$ pour une image $n \times n$. Pour $i = 1, \dots, N$, soit f_i la fonction f évaluée au point i et $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$ le vecteur correspondant de taille N . La matrice $N \times N$ correspondante à l'opérateur A , que nous désignons par le même symbole, est, selon l'approximation de la méthode trapézoïdale pour le calcul numérique d'une intégrale simple, avec un espacement d'un pixel [24] :

$$\begin{aligned} A(kn + i, kn + 1) &= \frac{1}{2}; & i = 2, \dots, n, \\ & & k = 0, \dots, n - 1; \\ A(kn + i, kn + i) &= \frac{1}{2}; & i = 2, \dots, n, \\ & & k = 0, \dots, n - 1; \\ A(kn + i, kn + i - j) &= 1; & i = 3, \dots, n, \\ & & j = 1, \dots, i - 2, & k = 0, \dots, n - 1, \end{aligned}$$

tous les éléments restants étant 0. La matrice A est creuse, diagonale par blocs $n \times n$. De la même manière, on a la matrice $N \times N$ A^* :

$$\begin{aligned} A^*(i, i) &= \frac{1}{2}; & i \in [1, n^2], i \neq kn, \\ & & k = 1, \dots, n \\ A^*(kn + i, (k + 1)n) &= \frac{1}{2}; & i = 1, \dots, n - 1, \\ & & k = 0, \dots, n - 1; \\ A^*(kn + i, kn + i + j) &= 1; & i = 1, \dots, n - 1; \\ & & j = 1, \dots, n - i - 1, \\ & & k = 0, \dots, n - 1, \end{aligned}$$

tout autre élément égal à 0. Le laplacien peut être approximé par $\beta \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (f_j - f_i)$, où le coefficient constant de l'approximation est absorbé par β , et \mathcal{N}_i est l'ensemble des indices des voisins de i . Notant $n_i = \text{card}(\mathcal{N}_i)$, la matrice correspondante est :

$$\begin{aligned} L(i, i) &= -\beta n_i; & i = 1, \dots, N \\ L(i, j) &= \beta; & j \in \mathcal{N}_i. \end{aligned}$$

Finalement, le système d'équations linéaires à résoudre est :

$$(A^*A - L)\mathbf{f} = A^*I. \quad (6)$$

C'est un grand système creux d'équations linéaires qu'on peut résoudre avec la méthode de Gauss-Seidel.

3 Tests

On procède à une évaluation qualitative et quantitative de la différentiation par anti-différentiation régularisée. On étudie la méthode dans le contexte de deux problèmes d'analyse de mouvements importants, où les dérivées d'images spatiales sont impliquées d'une manière significative : (a) l'estimation du flot optique (2D) standard avec la formulation variationnelle du Horn-Schunck [6–8] en utilisant la base de données de référence *Middlebury* ; et (b) l'estimation du flot de scène (3D) à partir d'une séquence d'images monoculaire comme en [9]. Nous évaluons aussi d'autres expériences sur une image synthétique aux dérivées partielles connues. Les résultats de tous les tests montrent que la différentiation régularisée présente de meilleures performances par rapport à la moyenne des différences finies.

3.1 Image synthétique

Cet exemple utilise une image synthétique illustrée en Fig. 1 et sa version bruitée obtenue par l'ajout d'un bruit gaussien blanc avec un rapport signal-bruit égale à 0.5dB. L'image a une forme pyramidale dont la vérité terrain de ses dérivées est déjà calculée. On a appliqué la différentiation régularisée et la moyenne locale des différences finies utilisée en (1) pour chaque image. Fig. 1 expose les résultats qui montrent que dans le cas de présence du bruit, les valeurs calculées par la différentiation régularisée sont plus proches des dérivées réelles. La table 1 donne les erreurs moyennes quadratiques entre les valeurs des dérivées partielles estimées et la vérité terrain. Dans le cas de l'image originale, on remarque que les moyennes locales des différences finies ont des résultats similaires. Cependant, dans

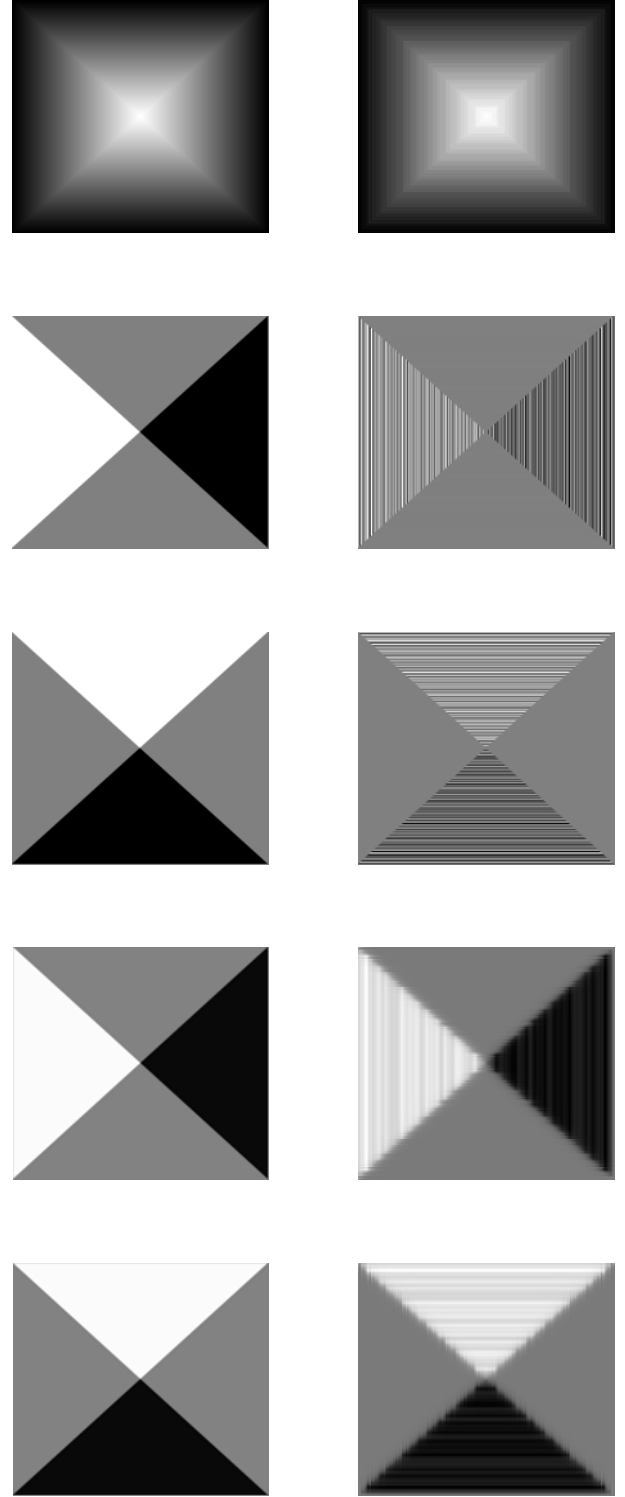


FIGURE 1 – Image synthétique. Sans bruit (colonne 1), de haut en bas : l'image ; ses dérivées I_x et I_y , calculées par moyenne locale de différences finies ; et par différentiation régularisée ($\beta = 0.1$). Avec bruit (colonne 2), de haut en bas : l'image ; ses dérivées I_x et I_y , calculées par moyenne locale de différences finies ; et par différentiation régularisée ($\beta = 5$).

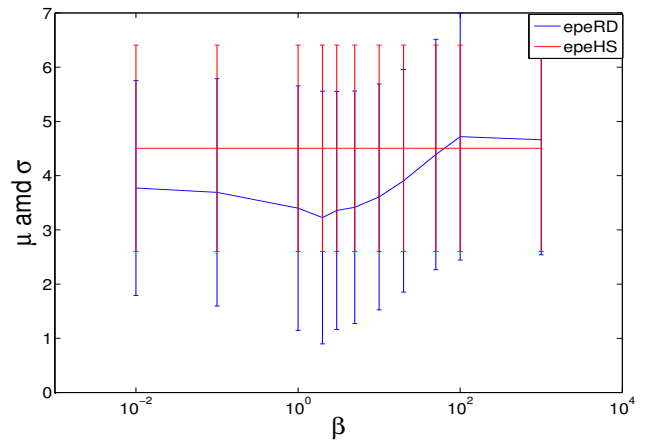
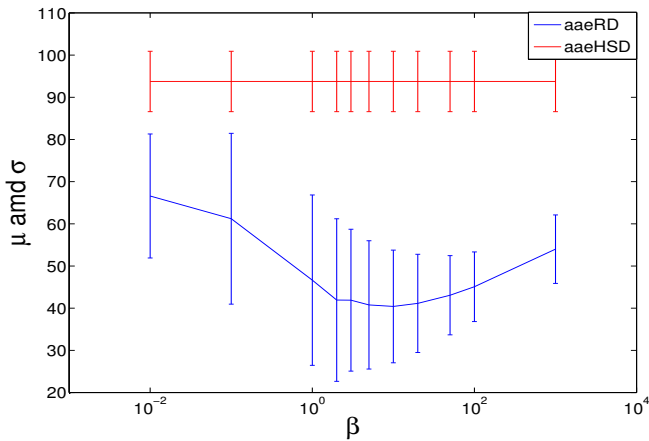


FIGURE 2 – Base de données *Middlebury* : La moyenne et la déviation standard de l’erreur angulaire *aae* (à gauche) et de l’erreur sur le module du vecteur *epe* (à droite) pour différentes valeurs du coefficient de pondération β de la fonctionnelle de différentiation régularisée. La largeur des barres indique la valeur de la déviation standard.

le cas d’image bruitée, la différentiation régularisée est plus performante.

TABLE 1 – Erreurs quadratiques moyennes entre les valeurs réelles des dérivées partielles et les valeurs calculées par moyenne locale des différences finies (M.L.D.F) et par dérivation régularisée (D.R).

Méthode	L.A.F.D.	R.D.
Pyramide	0.01	0.02 ($\beta = 0.1$)
Pyramide bruitée	1.09	0.04 ($\beta = 5$)

3.2 Estimation du flot optique

Dans le cadre du calcul du flot optique, l’exemple qui suit montre l’avantage de la méthode de différentiation variationnelle que nous avons décrite sur une moyenne locale de différences finies, notamment (1). Pour le flot optique, on utilise l’algorithme référence de Horn et Schunck [6–8]. Pour cela, on comparera la précision des flots optiques avec et sans la méthode de différentiation variationnelle que nous avons développée. Pour les tests, on utilisera les séquences de la base de référence *Middlebury* [25] pour lesquelles le flot réel est donné¹. Ces séquences incluent (i) des scènes réelles avec des mouvements non rigides, (ii) des séquences synthétiques complexes et (iii) des séquences stéréos modifiées de scènes statiques réelles. On utilise deux mesures d’erreurs standards pour l’évaluation du flot optique [25] : la moyenne d’erreur angulaire (*aae*) et la moyenne d’erreur sur le module du vecteur (*epe*). Fig. 2 donne les moyennes *aae* et *epe* sur les séquences utilisées et pour différentes valeurs du coefficient de régularisation β . Les graphes montrent généralement des valeurs d’erreurs

plus petites dans le cas de la différentiation variationnelle régularisée (courbes en bleu). Ces résultats confirment les avantages pratiques de la différentiation régularisée. La figure 3 montre un exemple de résultat (séquence *Dimetrodon*) où le flot est visuellement plus conforme au vrai mouvement pour la méthode variationnelle.

TABLE 2 – Moyenne d’erreur angulaire (*aae*) et Moyenne d’erreur sur le module du vecteur (*epe*) du flot optique construit à partir du flot de scène estimée : en utilisant la dérivation régularisée (D.R) et en utilisant la moyenne locale des différences finies (M.L.D.F). Le coefficient β est fixé à 1 pour tous les exemples.

Séquence	Erreur	D.R	M.L.D.F (1)
Marbled-block	<i>aae</i>	4.14	8.90
	<i>epe</i>	0.10	0.20
Cylinder	<i>aae</i>	18.68	59.27
	<i>epe</i>	0.78	2.04
Berber	<i>aae</i>	11.61	38.51
	<i>epe</i>	0.41	1.11
Pharaohs	<i>aae</i>	20.01	59.17
	<i>epe</i>	0.62	1.55
Rock	<i>aae</i>	23.18	90.71
	<i>epe</i>	0.92	2.50
Mean	<i>aae</i>	15.52	51.31
	<i>epe</i>	0.57	1.48

3.3 Estimation du flot de scène

Les tests suivants ont trait à l’estimation du flot de scène et de la profondeur dans une séquence d’images monoculaire [9]. Le flot de scène est le champ de vitesse 3D des surfaces visibles de l’environnement. La formulation du flot de scène implique les dérivées partielles d’image.

1. <http://vision.middlebury.edu/flow/>

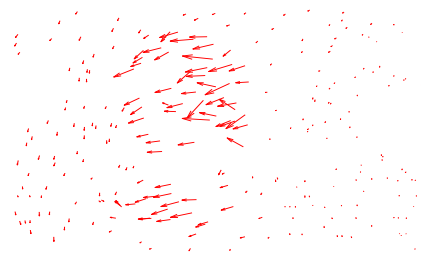
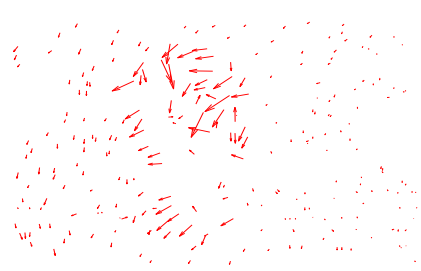
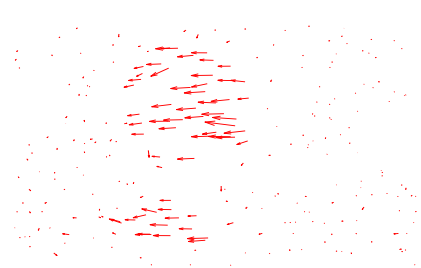
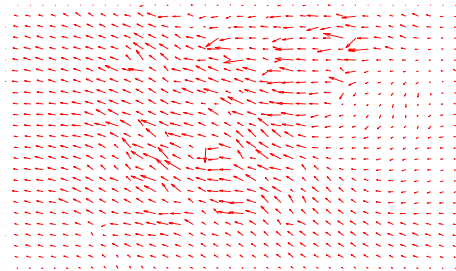
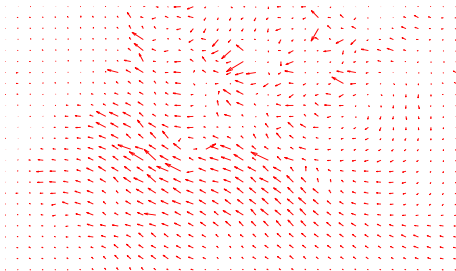
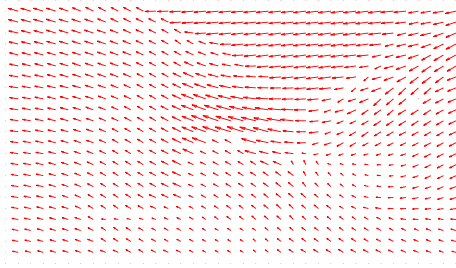


FIGURE 3 – La séquence *Dimetrodon*. La première des deux images utilisées, en première ligne. Une représentation vectorielle est montrée pour la vérité terrain du flot optique en deuxième ligne, pour le flot optique calculé par les différences finies standards en 1 (aae=25.11, epe=0.74) en troisième ligne et pour le flot optique estimé par l'algorithme de la différentiation régularisée avec $\beta = 1$ (aae=23.02, epe=0.69) en dernière ligne.

FIGURE 4 – Séquence *Berber*. Première ligne : la première des deux images d'entrée. Deuxième ligne : la vérité terrain du flot optique. Troisième ligne : flot optique correspondant au flot de scène estimé en utilisant la moyenne locale des différences finies. Quatrième ligne : flot optique correspondant au flot de scène estimé en utilisant la dérivation régularisée.

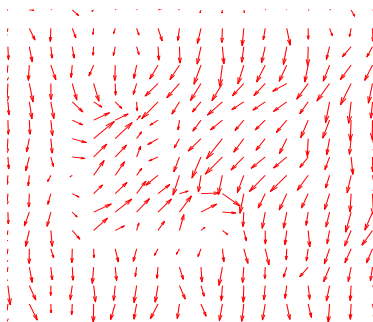
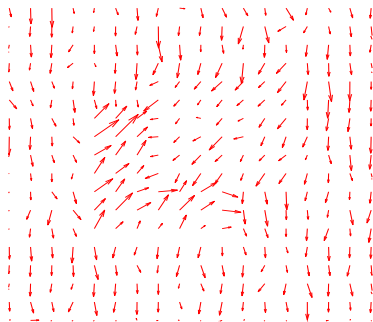
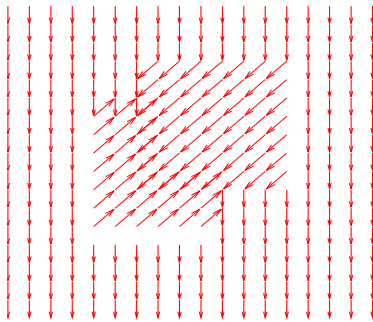
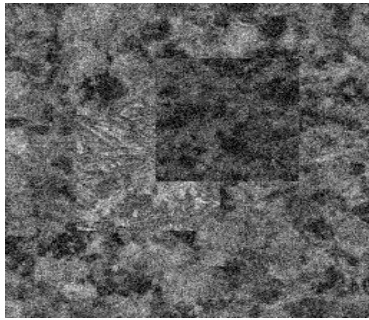


FIGURE 5 – Séquence *Synthetic squares*. Première ligne : la première des deux images d'entrée. Deuxième ligne : la vérité terrain du flot optique. Troisième ligne : flot optique correspondant au flot de scène estimé en utilisant la moyenne locale des différences finies. Quatrième ligne : flot optique correspondant au flot de scène estimé en utilisant la dérivation régularisée.

On compare les flots de scène obtenus par l'utilisation de la différentiation régularisée et ceux obtenus par la moyenne locale des différences finies (1) pour le calcul des dérivées partielles de l'image. On a utilisé la base de données expérimentale utilisée dans [9]. Les caractéristiques des séquences présentent des défis : faible variation d'intensité spatiotemporelle, présence d'ombres, mouvements réels complexes. En l'absence du flot de scène réel, on évalue les résultats via le flot optique correspondant au flot de scène calculé. Le Tableau 2 montre les erreurs aae et epe pour les séquences utilisées. On voit clairement que les performances de l'algorithme utilisant la dérivation régularisée pour le calcul des dérivées partielles sont meilleures que celles de l'algorithme utilisant la moyenne locale des différences finies. Ce tableau d'erreurs montre l'avantage pratique de la différentiation régularisée sur la précision de l'estimation du mouvement. Pour une évaluation qualitative visuelle, on montre les résultats réalisés par l'application des différentes méthodes sur la séquence d'images réelles *Berber* (Figure 4). On voit clairement que les mouvements calculés sont plus cohérents lorsque on utilise des dérivées image calculées par la méthode variationnelle que nous avons décrite.

L'exemple suivant montre directement l'avantage d'utiliser des dérivées régularisées en présence de bruit. On a appliqué l'algorithme de l'estimation du flot de scène à la séquence d'images synthétiques *Synthetic squares* bruitée (Figure 5). Le bruit a été ajouté indépendamment sur la première et la deuxième image. Les valeurs du bruit proviennent d'une gaussienne discrétisée, décalée et tronquée dans l'intervalle $[0, 100]$ des niveaux de gris, où l'intervalle globale de l'image est $[0, 255]$. Visiblement, dans la figure 5, les champs de vecteurs sont cohérents avec l'aspect général attendu du mouvement. Quantitativement, pour le flot optique construit à partir du flot de scène estimé en utilisant la moyenne locale des différences finies (M.L.D.F), la moyenne d'erreur angulaire (aae) est 24° et la moyenne d'erreur sur le module du vecteur (epe) est 0.65 pixel. Pour le flot optique construit à partir du flot de scène estimé en utilisant la dérivation régularisée (D.R), l'aae est 15° et l'epe est 0.4 pixel. La méthode de calcul des dérivées de l'image par dérivation régularisée est plus robuste face au bruit.

4 Conclusion

Dans ce travail, on a proposé une méthode variationnelle permettant un calcul régularisé des dérivées partielles d'une image. La fonctionnelle objectif contient un terme d'adéquation des dérivées à l'image et un terme de régularisation par lissage. Le terme des données utilise un opérateur d'anti-différentiation qui contraint une dérivée à une fonction qui redonne l'image lorsqu'on l'intègre. La discrétisation des équations d'Euler-Lagrange donne un système creux d'équations linéaires de grande taille qui peut se résoudre facilement par la méthode de Gauss-Seidel. On a testé l'impact de la méthode dans la résolution de deux

problèmes importants en analyse du mouvement dans des séquences d'images : calcul du flot optique et calcul du flot de scène. Les résultats des évaluations qualitatives et quantitatives qui découlent de l'application de l'algorithme sur des séquences d'images synthétiques et réelles montrent que les flots optiques et les flots de scènes calculés avec des dérivées résultant de la méthode de différentiation régularisée sont plus précis que ceux obtenus lorsque ces dérivées sont calculées par l'une des méthodes traditionnelles qui approxime les dérivées localement par une moyenne de différences finies. En utilisant une régularisation L^1 , plutôt que quadratique comme dans cette étude, l'algorithme peut être généralisé de façon à conserver les frontières de mouvement et de profondeur. La méthode peut aussi être étudiée dans le cadre d'autres applications comme la stéréoscopie.

Références

- [1] M. P. Heinrich, M. Jenkinson, M. Bhushan, T. Matin, F. V. Gleeson, M. Brady, and J. A. Schnabel, "Mind : Modality independent neighbourhood descriptor for multi-modal deformable registration," *Medical Image Analysis*, vol. 16, no. 7, pp. 1423–1435, 2012.
- [2] S. Periaswamy and H. Farid, "Medical image registration with partial data," *Medical image analysis*, vol. 10, no. 3, pp. 452–464, 2006.
- [3] M. Tappen, W. Freeman, and E. Adelson, "Recovering intrinsic images from a single image," *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, vol. 27, no. 9, pp. 1459–1472, Sept 2005.
- [4] P. J. Besl and R. Jain, "Invariant surface characteristics for 3d object recognition in range images." *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, vol. 33, no. 1, pp. 33–80, 1986. [Online]. Available : <http://dblp.uni-trier.de/db/journals/cvgip/cvgip33.html/BeslJ86>
- [5] Y. Quéau and J.-D. Durou, "Résolution du problème de la stéréophotométrie non calibrée par estimation de l'intensité des éclairages," 2013.
- [6] A. Mitiche and J. Aggarwal, *Computer Vision Analysis of Image Motion by Variational Methods*. Springer, 2013.
- [7] D. Sun, S. Roth, and M. J. Black, "Secrets of optical flow estimation and their principles," in *Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2010 IEEE Conference on*. IEEE, 2010, pp. 2432–2439.
- [8] B. Horn and B. Schunk, "Determining optical flow," *Artificial Intelligence*, no. 17, pp. 185–203, 1981.
- [9] A. Mitiche, Y. Mathlouthi, and I. Ben Ayed, "Monocular concurrent recovery of structure and motion scene flow," *Front. ICT 2 : 16*. doi : 10.3389/fict, 2015.
- [10] D. Terzopoulos, "Regularization of inverse visual problems involving discontinuities," *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, vol. PAMI-8, no. 4, pp. 413–424, July 1986.
- [11] J. Crank *et al.*, *The mathematics of diffusion*. Clarendon press Oxford, 1975, vol. 2, no. 3.
- [12] R. Chartrand, "Numerical differentiation of noisy, nonsmooth data." *ISRN Applied Mathematics*, vol. 2011, p. 11, 2011. [Online]. Available : <http://dx.doi.org/10.5402/2011/164564>
- [13] I. T. Young and L. J. Van Vliet, "Recursive implementation of the gaussian filter," *Signal processing*, vol. 44, no. 2, pp. 139–151, 1995.
- [14] L. J. Van Vliet, I. T. Young, and P. W. Verbeek, "Recursive gaussian derivative filters," in *Pattern Recognition, 1998. Proceedings. Fourteenth International Conference on*, vol. 1. IEEE, 1998, pp. 509–514.
- [15] J.-M. Geusebroek, A. W. Smeulders, and J. Van de Weijer, "Fast anisotropic gauss filtering," *Image Processing, IEEE Transactions on*, vol. 12, no. 8, pp. 938–943, 2003.
- [16] B. Triggs and M. Sdika, "Boundary conditions for young-van vliet recursive filtering," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 54, no. 6, pp. 2365–2367, 2006.
- [17] J. Cullum, "Numerical differentiation and regularization," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 8, pp. 254–265, 1971.
- [18] M. Hanke and O. Scherzer, "Inverse problems light : numerical differentiation," *The American Mathematical Monthly*, vol. 108, No. 6, pp. 512–521, 2001.
- [19] C. R. Vogel, *Computational methods for inverse problems*. SIAM Frontiers in Applied Mathematics, 2002.
- [20] M. Hanke and O. Scherzer, "Inverse problems light : numerical differentiation," *American Mathematical Monthly*, pp. 512–521, 2001.
- [21] I. R. Khan and R. Ohba, "New finite difference formulas for numerical differentiation," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 126, no. 1, pp. 269–276, 2000.
- [22] D. Murio, C. E. Mejía, and S. Zhan, "Discrete mollification and automatic numerical differentiation," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 35, no. 5, pp. 1–16, 1998.
- [23] A. Ramm and A. Smirnova, "On stable numerical differentiation," *Mathematics of computation*, vol. 70, no. 235, pp. 1131–1153, 2001.
- [24] G. Forsythe, M. Malcolm, and C. Moler, *Computer methods for mathematical computations*. Prentice-Hall, 1977.
- [25] S. Baker, D. Scharstein, J. Lewis, S. Roth, M. J. Black, and R. Szeliski, "A database and evaluation methodology for optical flow," *International Journal of Computer Vision*, vol. 92, no. 1, pp. 1–31, 2011.