

# Squelette hiérarchique pour la description de formes\*

Aurélie Leborgne<sup>1,2</sup>

Julien Mille<sup>3</sup>

Laure Tougne<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Univ Lyon, INSA-Lyon, LIRIS, UMR5205, F-69621, LYON, France

<sup>2</sup> Université d'Auvergne, ISIT, UMR6284, F-63000, France

<sup>3</sup> INSA-Centre Val de Loire, LI, EA 6300, F-37200, France

<sup>4</sup> Univ Lyon, Université Lyon 2, LIRIS, UMR5205, F-69676, LYON, France

aurelie.leborgne@liris.cnrs.fr

## Résumé

*Le squelette permet de décrire efficacement une forme de façon globale et locale. Néanmoins, en l'état, il est difficile de distinguer les branches représentant l'allure générale de celles issues de détails. Nous proposons donc d'exploiter la hiérarchie naturelle du squelette en quantifiant l'importance de ses branches. Notre méthode est basée sur une succession de lissages de la forme et sur la déformation du squelette pour qu'il s'adapte à chaque forme lissée.*

## Mots Clef

Squelette hiérarchique, élagage de squelette, appariement de formes.

## Abstract

*The skeleton is able to efficiently describe a shape by its global and local geometric properties. Nevertheless, as is, it is difficult to distinguish the branches representing the general appearance of those from details. So, we propose to exploit the natural hierarchy of the skeleton by quantifying the significance of branches. Our method is based on the successive shape smoothings and on the deformability of the skeleton to adapt it to each smoothed shape.*

## Keywords

Hierarchical skeleton, pruning, pattern recognition.

## 1 Introduction

De nombreuses méthodes d'appariement de formes ont été proposées dans la littérature [19]. L'efficacité de l'appariement de formes reposant sur le squelette est bien connue mais son coût de calcul est plus important que celui des méthodes basées sur le contour de la forme [15]. Dans nos travaux, nous hiérarchisons le squelette d'espèces végétales correspondant aux images binaires (formes simplement connexes) obtenues à partir de photographies de feuilles de végétaux, pour l'utiliser prochainement dans un contexte d'appariement de formes.

L'utilisation d'une hiérarchie entre les branches d'un même squelette, afin de comparer celles qui ont le même ordre d'importance, est une manière de réduire le temps de

calcul. En effet, il est facile d'imaginer que certaines branches de squelette ont moins d'importance que d'autres. Il est donc nécessaire de quantifier l'importance de chaque branche. Dans la littérature, Attali et al. mesurent leur importance par le biais de leur longueur, leur allongement ou l'aire correspondante dans la forme [1]. Quant à Chazal et Lieutier, ils ont mis au point le  $\lambda$ -axe médian [4], qui peut être considéré comme une sorte de squelette hiérarchique dans le sens où il s'agit de déterminer la partie stable du squelette d'origine. Plus récemment, Liu et al. [10, 11] utilisent des mesures basées sur la reconstruction de la forme à partir des branches. Shen et al. [18] développent une mesure appelée rapport potentiel de flexion basée sur l'importance des segments de contour en tenant compte de l'information contextuelle. D'autres auteurs utilisent des contributions plus visuelles comme Bai et al. [2], qui effectuent un prétraitement du bord de la forme utilisant une évolution de courbe discrète afin de déterminer si chaque branche est importante ou non. De la même manière, Montero et al. [12] proposent une méthode reposant sur l'approximation du contour. Une des méthodes les plus récentes [16] s'appuie sur la distance entre un point extrémité et un point de branche, et leur distance respective au bord de la forme.

Dans cet article, nous proposons de lier l'importance à la durée de persistance d'une branche lorsqu'on lisse la forme. L'importance d'une branche peut être utilisée pour construire un squelette hiérarchique, qui a exactement les mêmes propriétés que son squelette initial mais qui, en plus, est doté d'un poids associé à chacune de ses branches. Dans la littérature, quelques auteurs utilisent ce genre de squelette dans le but de décrire une forme [14] ou d'élaguer un squelette [16] (supprimer les branches de squelette causées par le bruit sur le contour de la forme). Yang et al. [20] appariant des formes à l'aide de séquences de squelettes élagués du niveau fin au niveau grossier, en se basant sur l'algorithme de Bai et al. [2].

Les méthodes d'élagage peuvent être divisées en deux catégories. La première consiste à lisser le bord de la forme avant de calculer le squelette [5, 17]. Le problème de ce type de méthode est la production d'un biais dans le squelette dû à la modification de la forme. La seconde consiste à faire un post-traitement sur le squelette. Pour cela, les méthodes sont globalement basées sur des valeurs, précédem-

\*Ce projet est soutenu par l'ANR (ANR-15-CE38-0004-01)

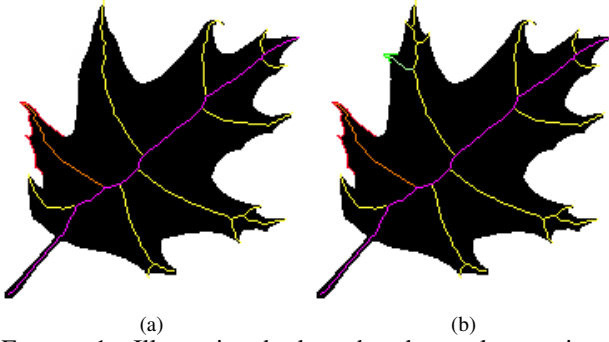


FIGURE 1 – Illustration des branches du squelette, qui sont plus ou moins importantes. (a) Squelette d'une feuille, (b) Squelette de cette même feuille avec quelques détails en moins.

ment déterminées, associées aux points de squelette. Ces derniers sont alors supprimés en fonction d'un seuil donné [13, 5]. Le point négatif de ces méthodes est qu'elles reposent sur la suppression de points de squelette. Par conséquent, dans de nombreux cas, le squelette est déconnecté et devient non-homotopique à la forme. D'autres méthodes s'appuient sur l'importance des valeurs associées à chaque branche. De cette manière, le squelette est élagué branche par branche [9, 2, 10, 11, 18]. La méthode proposée appartient à cette catégorie. De plus, elle se fonde sur une succession de lissages du bord de la forme initiale comme [5, 17], mais s'appuie sur la trace du squelette d'origine qui est alors utilisable pour l'appariement de formes.

## 2 Squelette hiérarchique

Un squelette est une représentation concise de la forme. Pour faire de l'appariement, un squelette idéal est homotope à la forme, fin (un pixel d'épaisseur), robuste au bruit et permet la reconstruction de la forme. Précédemment, nous avons proposé le Squelette Connecté Euclidien Discret (DECS), qui remplit ces exigences [9]. Nous notons  $S$  un tel squelette.

Lors de l'appariement de deux formes utilisant leur squelette, il semble naturel d'apparier les branches ayant le même ordre d'importance. Considérons la branche la plus importante de la première forme, c'est-à-dire celle qui a été générée par l'allure globale de la forme (un exemple étant la branche rose sur la Figure 1(a)). De toute évidence, il n'y a aucune raison d'apparier cette branche à une autre de la seconde forme ayant une faible importance, c'est-à-dire une branche provenant d'un détail de la forme (par exemple la branche verte sur la Figure 1(b)). En effet, un détail de la forme est conceptuellement très différent de l'allure générale de la forme.

La quantification de l'importance de chaque branche peut être appliquée aux squelettes car chaque branche provient d'une irrégularité plus ou moins importante du bord de la forme. Considérons l'exemple de la feuille d'arbre sur la Figure 1. Visuellement, les deux images sont très similaires puisque seulement trois petits détails ont été ôtés entre la Figure 1(b) et la Figure 1(a). Néanmoins, les deux squelettes obtenus sont sensiblement différents et pourtant, nous voudrions apparier ces deux formes. Par conséquent, les branches correspondant à des détails devraient avoir une importance très faible, pour obtenir deux squelettes simi-

laires ou presque. Plus précisément, la composante verte du bord est à l'origine de la branche de squelette verte. De la même manière, la composante rouge du bord est responsable de la branche de squelette orange. Ainsi, la branche de squelette orange est plus importante que la verte.

Pour déterminer l'importance des branches, nous proposons de lisser successivement la forme (Partie 2.1). Ainsi, les détails du bord de la forme sont supprimés et les branches de squelette sont éliminées. Nous proposons deux méthodes de mise à jour du squelette : une méthode naïve et une méthode de squelette déformable (Partie 2.2). Pour quantifier l'importance des branches, nous avons opté pour l'échelle à laquelle les branches disparaissent lorsque nous effectuons plusieurs lissages successifs du bord. Ce faisant, le nombre de branches décroît lorsque le bord est lissé. En conséquence, plus une branche de squelette persiste, plus elle est importante.

### 2.1 Lissage à aire constante

Soit  $\mathcal{F}^{(0)} \subset \mathbb{Z}^2$  la forme initiale. Nous souhaitons générer une séquence  $(\mathcal{F}^{(0)}, \mathcal{F}^{(1)}, \dots, \mathcal{F}^{(\lambda)}, \dots)$  de formes successivement lissées. La conservation de l'aire permet le maintien des proportions tout au long du processus de lissage. La forme doit être lissée sans rétrécir car nous voulons extraire des squelettes sur des formes lissées de même aire. Ici, nous traitons uniquement des formes connectées sans trou. Les feuilles d'arbre, qui sont la principale application visée, sont dans ce cas là.

**Équation d'évolution.** Pour extraire le bord, nous effectuons un suivi du contour. Afin de lisser la courbe en maintenant l'aire intérieure, nous avons utilisé l'équation suivante [6] :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \left( \kappa - \frac{2\pi}{\mathcal{L}} \right) \mathcal{N} \quad (1)$$

où  $C(s, t) = (x(s, t), y(s, t))$  est la courbe variant en fonction du temps  $t$  et d'un paramètre spatial  $s$ ,  $\mathcal{N}$  est la normale unitaire intérieure de  $C$ ,  $\mathcal{L}$  est la longueur Euclidienne totale et  $\kappa$ , la courbure Euclidienne définie par :

$$\kappa = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \quad (2)$$

où  $'$  représente la dérivée partielle en fonction de  $s$ . Sous l'effet de ce flot, la courbe converge vers un cercle dont l'aire est égale à celle de la forme initiale. Un exemple d'évolution est présenté sur la Figure 2.

Nous notons que  $\lambda$ , le nombre de lissage, est proportionnel à  $t$ , le temps d'évolution de la courbe. Plus précisément,  $\lambda$  est lié à  $t$  car pour obtenir un lissage visuellement linéaire de la courbe entre deux itérations  $\lambda$  et  $\lambda + 1$ , les points de la courbe sont déplacés plusieurs fois jusqu'à ce qu'ils se positionnent correctement. En résumé,  $\lambda$  est une valeur que va atteindre  $t$ .

**Discrétisation.** Les formes devant être définies dans l'espace discret, il est nécessaire de discrétiser l'Équation 1. Pour ce faire, nous avons estimé les dérivées par différences finies centrées :

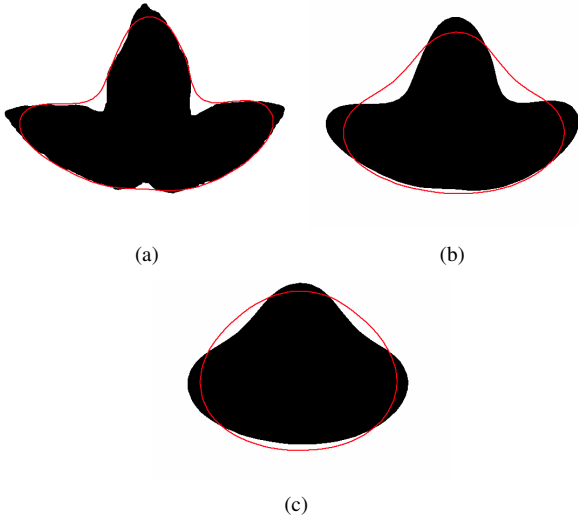


FIGURE 2 – Illustration de l'évolution d'une courbe (contour de la forme de la Figure (a)) sous l'effet du flot de l'Équation 1. À chaque évolution, une forme est créée à partir de la courbe précédemment lissée.

$$x'(s) \approx \frac{x(s + \delta s) - x(s - \delta s)}{2\delta s} \text{ avec } \delta s = 1$$

$$x''(s) \approx \frac{x(s + \delta s) - 2x(s) + x(s - \delta s)}{\delta s^2} \text{ avec } \delta s = 1$$

et de même pour  $y$ . Nous avons choisi  $\delta s = 1$  car nous supposons que la distance entre deux points consécutifs de la courbe est approximativement 1. La courbe étant discrétisée en une séquence de points  $\mathbf{q}_i$ , les premier et second ordre sont estimés par :

$$x'_{\mathbf{q}_i} \approx \frac{x_{\mathbf{q}_{i+1}} - x_{\mathbf{q}_{i-1}}}{2} \text{ et } x''_{\mathbf{q}_i} \approx x_{\mathbf{q}_{i+1}} + x_{\mathbf{q}_{i-1}} - 2x_{\mathbf{q}_i}$$

et de la même façon pour  $y$ .

La longueur, la courbure et le vecteur normal sont estimés à l'aide du schéma de discrétisation précédent. La longueur  $\mathcal{L}$  est calculée comme étant la somme des distances Euclidiennes entre les points successifs de la courbe.  $\mathcal{N}_i$  est calculé grâce à :

$$\mathcal{N}_i = \frac{(-y'_{\mathbf{q}_i}, x'_{\mathbf{q}_i})}{\sqrt{x'^2_{\mathbf{q}_i} + y'^2_{\mathbf{q}_i}}} \quad (3)$$

En résumé, pour une itération, chaque point de la courbe  $\mathbf{q}_i$  est remplacé par le point obtenu avec l'équation d'évolution discrète (4).

$$\mathbf{q}_i^{t+1} = \mathbf{q}_i^t + \Delta t \left( \kappa_i - \frac{2\pi}{\mathcal{L}} \right) \mathcal{N}_i \quad (4)$$

Dans cette équation,  $\Delta t$  est compris entre 0 et 1. Lorsqu'il est trop petit, la convergence est lente. Quand il est trop grand, une instabilité s'installe car les points oscillent. Nous avons donc choisi  $\Delta t = 0,5$  dans la suite de nos travaux.

**Ré-échantillonnage.** Pour préserver la régularité du lissage avec une densité similaire à celle du contour initial,

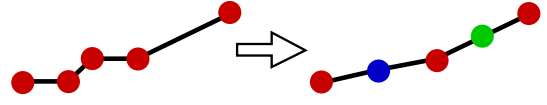


FIGURE 3 – Exemple de ré-échantillonnage du contour d'une forme. Le point bleu provient d'une fusion, alors que le point vert résulte d'une séparation.

il est nécessaire de ré-échantillonner la courbe à chaque itération de lissage. Cela permet d'avoir une courbe homogène et une bonne approximation de la courbure, des normales, *etc.* Dans le cas contraire, l'estimation de la courbure deviendrait instable lorsque deux points seraient trop proches notamment. Lorsque deux points consécutifs de la courbe sont trop proches, ces deux points sont fusionnés en un point au milieu de ces deux points. De même, nous ajoutons un point au milieu de deux points consécutifs quand ces deux points sont trop éloignés.

L'objectif est de maintenir la condition suivante :

$$a \leq \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i+1}\| \leq 2a$$

où  $a$  appartient à  $\mathbb{R}$ . Dans nos travaux,  $a = 1$ .

La Figure 3 montre un exemple d'une partie du contour d'une forme avant et après le ré-échantillonnage.

**Obtention d'une forme discrète à partir du contour lissé.** Comme DECS [9] ne peut être appliqué que sur une forme représentée par un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^2$ , il est nécessaire de convertir le contour lissé en une séquence de points appartenant à  $\mathbb{Z}^2$ . Les points  $\mathbf{q}_i$  sont discrétisés en arrondissant leurs coordonnées à l'entier le plus proche. Un segment discret est tracé entre chaque paire de points consécutifs  $[\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{i+1}]$ . La forme lissée  $\mathcal{F}^{(\lambda)}$  est finalement obtenue par remplissage de l'intérieur.

## 2.2 Méthodes pour la construction d'un squelette hiérarchique

L'idée générale est d'obtenir un squelette pour chaque forme lissée et de les condenser tous en un squelette hiérarchique. Dorénavant, nous appellerons  $n_{smooth\_max}$ , le nombre de lissages nécessaires pour réduire un squelette à un point, et donc à une forme associée à un cercle, grâce à une succession de lissages.

Dans la suite de cet article, nous considérons qu'un squelette  $S$  est un ensemble de branches ayant des relations d'adjacence. Une branche est une courbe discrète 8-connexe. Deux branches sont adjacentes si elles ont un point en commun. Par construction, les points de jonction appartiennent à plusieurs branches.

**Définition 1 (Branche).** Notons  $N_8(\mathbf{p}_i)$ , le voisinage 8-connexe de  $\mathbf{p}_i$ . Une branche est une séquence  $(\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_{u-1})$  de  $u$  pixels de  $S$  tel que pour tout  $i = 1, \dots, (u-2)$ ,  $N_8(\mathbf{p}_i) \cap S = \{\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_{i+1}\}$  et pour  $i = 0$  et  $i = u-1$ ,  $|N_8(\mathbf{p}_i) \cap S| \in \{1, 3, 4\}$ . Les extrémités des branches sont  $\mathbf{p}_0$  et  $\mathbf{p}_{u-1}$ .

**Définition 2 (Branche terminale).** Une branche  $b = (\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_{u-1})$  est une branche terminale si  $|N_8(\mathbf{p}_0) \cap S| = 1$  ou  $|N_8(\mathbf{p}_{u-1}) \cap S| = 1$ , sinon  $b$  est une branche interne.

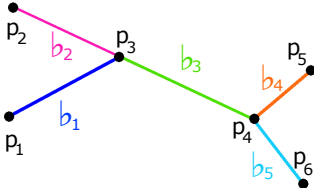


FIGURE 4 – Illustration du vocabulaire utilisé pour les branches et les points de squelette.

**Définition 3** (Ensemble des branches adjacentes en un point). *L'ensemble des branches adjacentes  $\mathcal{B}_A(b_i, \mathbf{p})$  à une branche  $b_i$  en un point  $\mathbf{p}$  est défini par :*

$$\mathcal{B}_A(b_i = (\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_{u-1})) = \{b_j = (\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_{v-1}) \mid \mathbf{q}_0 = \mathbf{p}_0 \text{ or } \mathbf{q}_{v-1} = \mathbf{p}_0 \text{ or } \mathbf{q}_0 = \mathbf{p}_{u-1} \text{ or } \mathbf{q}_{v-1} = \mathbf{p}_{u-1}\}$$

**Définition 4** (Ensemble des branches adjacentes). *L'ensemble des branches adjacentes ( $\mathcal{B}_A(b_i)$ ) à une branche  $b_i$  est défini par :*

$$\mathcal{B}_A(b_i) = \{\mathcal{B}_A(b_i, \mathbf{p}), \forall \mathbf{p} \in b_i\}$$

**Définition 5** (Chemin de branches). *Un chemin de branches est une séquence  $(b_0, \dots, b_{w-1})$  de  $w$  branches telle que pour tout  $i = 0, \dots, (w-2)$ ,  $b_{i+1}$  appartient à  $\mathcal{B}_A(b_i)$ .*

Ainsi, le squelette  $S$  peut être vu comme un ensemble de branches dans lequel pour chaque paire de branches  $b_i$  et  $b_j$ , il existe un chemin de branches entre  $b_i$  et  $b_j$ .

Pour plus de commodité, le vocabulaire concernant les branches et les points de squelette est illustré sur la Figure 4. Les points  $\mathbf{p}_1$  à  $\mathbf{p}_6$  sont des extrémités de branches. Plus précisément,  $\mathbf{p}_3$  et  $\mathbf{p}_4$  sont des points de jonction alors que  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_5$  et  $\mathbf{p}_6$  sont des points terminaux.  $b_1$  à  $b_5$  sont des branches composées de deux points extrémité, avec entre ces deux points des points de branche. Plus précisément,  $b_1, b_2, b_4$  et  $b_5$  sont des branches terminales alors que  $b_3$  est une branche interne. Nous appelons  $S_{\mathcal{F}(\lambda)}$ , le squelette calculé à partir de la forme lissée  $\mathcal{F}(\lambda)$ .

**Définition 6** (Métabranche). *Une métabranche  $b^m$  est une séquence de branches  $(b_0, \dots, b_{u'-1})$  appartenant à  $S_{\mathcal{F}(0)}$  tel que pour tout  $i = 0, \dots, (u'-2)$ ,  $b_i$  et  $b_{i+1}$  ont un pixel extrémité en commun. Une métabranche a deux extrémités.*

**Définition 7** (Squelette hiérarchique).  *$S_p$  est un ensemble de métabranches pondérées tel que toutes les branches de  $S_{\mathcal{F}(0)}$  appartiennent à une métabranche. Le poids d'une métabranche  $b^m$  est indiqué par  $w_{b^m}$ .*

Pour construire un squelette hiérarchique  $S_p$ , nous proposons d'abord une méthode dite "naïve", qui consiste à recalculer le squelette pour chaque forme lissée. Cependant, les squelettes obtenus ne sont pas suffisamment stables comme nous le verrons dans les exemples. C'est la raison pour laquelle nous avons implémenté une autre méthode basée sur une déformation du squelette initial dans le but de l'adapter successivement aux formes lissées. Il s'agit de la méthode appelée "squelette déformable".

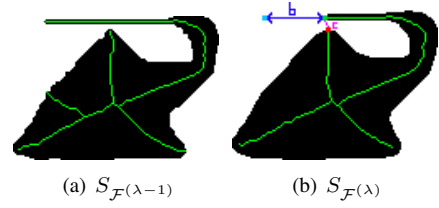


FIGURE 5 – Exemple d'appariement non trivial d'un point terminal de squelette entre deux étapes consécutives de lissage.

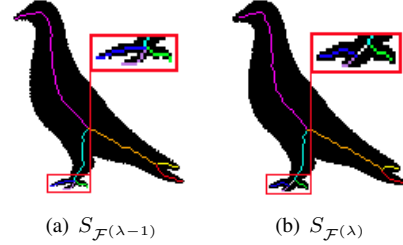


FIGURE 6 – Exemple de réorganisation interne du squelette entre deux étapes consécutives de lissage.

**Méthode naïve.** Le principe de la méthode naïve est de recalculer un squelette avec DECS sur chaque forme lissée jusqu'à ce que le squelette se résume à seulement un point. Ainsi, une séquence de squelettes  $h(S) = (S_{\mathcal{F}(\lambda)})_{\lambda \in [0; n_{smooth\_max}]}$  est générée. Pour construire le squelette hiérarchique à partir de  $h(S)$ , chaque branche terminale de chaque squelette  $S_{\mathcal{F}(\lambda)}$  doit être appariée avec une branche du squelette d'origine  $S_{\mathcal{F}(0)}$ . Le but est de déterminer, pour chaque branche  $b$  de  $S_{\mathcal{F}(0)}$ , l'itération à laquelle  $b$  devient inutile, c'est-à-dire l'itération à laquelle aucune branche ne s'apparie avec  $b$ . Les branches de  $S_{\mathcal{F}(\lambda)}$  ne sont pas identiques à celles de  $S_{\mathcal{F}(0)}$ . Souvent, elles se raccourcissent jusqu'à disparaître. Entre deux lissages consécutifs, un point terminal sur  $S_{\mathcal{F}(\lambda-1)}$  peut être plus proche, en terme de distance Euclidienne, d'un point terminal situé sur une branche voisine sur  $S_{\mathcal{F}(\lambda)}$  que du point terminal de sa propre branche. C'est le cas des branches issues de fines protubérance de la forme, qui sont lissées rapidement. Par exemple sur la Figure 5, la distance  $c$  est plus petite que la distance  $b$  entre deux points de squelette correspondants. De plus, les branches internes peuvent être réorganisées, comme le montre la Figure 6 et, dans certains cas, assez rares, des branches peuvent apparaître. L'appariement est donc instable. C'est la raison pour laquelle nous avons opté pour une autre méthode basée sur les contours actifs.

**Squelette déformable.** Le but est identique à celui de la méthode naïve, à savoir, obtenir un squelette pour chaque forme lissée jusqu'à ce que ce dernier se résume à un point. Nous obtenons donc également une séquence de squelettes  $h(S) = (S_{\mathcal{F}(\lambda)})_{\lambda \in [0; n_{smooth\_max}]}$ . À la différence de la méthode naïve, nous ne recalculons pas le squelette sur chaque forme mais nous déformons celui de l'itération précédente pour l'adapter à chaque forme lissée. Notre squelette déformable est basé sur le modèle de contour actif introduit par [7]. Le principe est de considérer une série de points déplaçables formant une courbe en deux dimensions (dans nos travaux, chaque branche du squelette constitue une courbe). Chacune d'elles se déplace alors pour aller se po-

sitionner sur la crête de la carte de distances la plus proche en essayant de conserver une certaine régularité. L'objectif est alors de minimiser l'énergie totale de la courbe, somme pondérée de deux énergies. La première énergie est appelée énergie interne. Elle ne dépend pas de la forme mais uniquement de la géométrie de la courbe. Ainsi, elle permet de conserver une courbe lisse tout en autorisant sa déformation qui est alors induite par l'énergie externe.

Nous considérons  $\mathbf{b}(u, t)$ , la paramétrisation continue d'une branche  $b$  sous forme de courbe ouverte et régulière. Dans cette section, l'exposant ( $\lambda$ ) est ignoré par commodité. Sauf mention contraire, toutes les quantités sont considérées à l'échelle courante  $\lambda$ . Le squelette déformable est initialisé à l'aide du squelette final de l'échelle précédente  $\lambda - 1$ .

**Définition 8** (Transformée en Distance Euclidienne EDT).  

$$EDT(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{q}} d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

où  $\mathbf{q} \notin \mathcal{F}$  et  $d$  est la distance Euclidienne entre deux points.

Chaque branche évolue selon le flot géométrique suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{b}(u, t)}{\partial t} &= (\nabla EDT(\mathbf{b}(u, t)) \cdot \mathcal{N}(u, t)) \mathcal{N}(u, t) \\ &\quad + \alpha \frac{\partial^2 \mathbf{b}(u, t)}{\partial u^2} \\ \mathbf{b}(\cdot, 0) &= \mathbf{b}^{(\lambda-1)}(\cdot) \end{aligned} \quad (5)$$

où  $\mathcal{N}$  est la normale à la courbe et  $\alpha$  est le poids contrôlant l'importance de la force de régularisation (force de lissage provenant de l'énergie interne) par rapport à la force d'attache aux données (provenant de l'énergie externe). En d'autres termes, cette force impose des contraintes sur la géométrie lors de la déformation. Cette dernière est provoquée par la force d'attache aux données qui attire les branches du squelette vers les crêtes les plus proches. Pour ce faire, le champ de vecteurs  $\nabla EDT$ , dirigé vers les crêtes de la carte de distance Euclidienne, est projeté localement sur la normale à la courbe. Ainsi, la branche est encouragée à s'aligner sur la crête la plus proche.

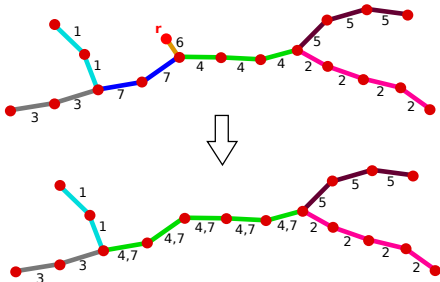


FIGURE 7 – Propagation des étiquettes après suppression d'une branche : la suppression du sommet  $r$  provoque la disparition de la branche d'étiquette 6. Les deux branches adjacentes (respectivement étiquetées 4 et 7) sont fusionnées et les étiquettes sont combinées dans la branche fusionnée

**Sommets et étiquetage des arêtes** Le squelette est échantillonné en un arbre. La position du  $i^{\text{ième}}$  sommet est notée  $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^2$ , l'ensemble des indices de ses sommets adjacents  $\eta_i$ . Le  $i^{\text{ième}}$  sommet est un point de branche si  $|\eta_i| =$

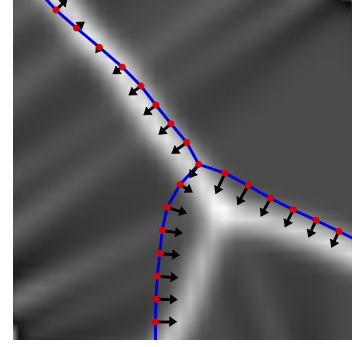


FIGURE 8 – Forces attirant les sommets vers les crêtes de la carte de distance Euclidienne

2, un point terminal si  $|\eta_i| = 1$  et un point de jonction si  $|\eta_i| > 2$ . Un point extrémité est un point de jonction ou un point terminal, en adéquation avec le vocabulaire illustré en Figure 4. Ici, une branche est une chaîne de sommets reliant deux sommets extrémité. Notons qu'une branche peut être composée uniquement de deux extrémités, et de l'arête les liant. Ainsi, une branche peut ne pas avoir de point de branche.

Les arêtes reliant les sommets sont étiquetées avec l'indice de la branche correspondante dans le squelette initial  $S_{\mathcal{F}(0)}$ , comme illustré en Figure 7. Comme expliqué en détail plus loin, les étiquettes des branches initiales seront passées aux branches fusionnées lors de la suppression des branches.

**Déformation discrète (l. 5 à 12 de l'Algorithme 1)** La force de régularisation est calculée comme suit :

$$\mathbf{r}_i = \begin{cases} \left( \frac{1}{|\eta_i|} \sum_{j \in \eta_i} \mathbf{q}_j \right) - \mathbf{q}_i & \text{si } |\eta_i| \geq 2 \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases} \quad (6)$$

Ainsi, la force de régularisation a tendance à ramener un point de la courbe vers le centre de gravité de ses voisins, ce qui a pour effet de lisser le squelette. La force d'attache aux données nécessite le calcul de la normale  $\mathcal{N}_i$  pour les points de branche, afin de les attirer vers la crête la plus proche. Elle est estimée à l'aide des deux sommets adjacents, par différences finies. Pour les extrémités, la normale considérée est celle de l'unique sommet adjacent. Pour les points de jonction, le gradient de la carte de distance Euclidienne est pris tel quel, sans projection. Nous écrivons ainsi la force d'attache aux données :

$$\mathbf{f}_i = \begin{cases} (\mathcal{N}_j \cdot \nabla EDT(\mathbf{q}_i)) \mathcal{N}_j & \text{si } |\eta_i| = 1, \eta_i = \{j\} \\ (\mathcal{N}_i \cdot \nabla EDT(\mathbf{q}_i)) \mathcal{N}_i & \text{si } |\eta_i| = 2 \\ \nabla EDT(\mathbf{q}_i) & \text{sinon} \end{cases} \quad (7)$$

L'équation d'évolution en chaque sommet, après discrétisation d'Euler avec un pas temporel  $\Delta t$ , est :

$$\mathbf{q}_i^{(t+1)} = \mathbf{q}_i^{(t)} + \Delta t \left( \alpha \mathbf{r}_i^{(t)} + \mathbf{f}_i^{(t)} \right) \quad (8)$$

en prenant  $\Delta t = 0.5$  et  $\alpha = 2$ . Si  $\alpha$  est trop grand, l'énergie externe devient négligeable, ce qui empêche la courbe de se déformer et d'aller se positionner sur les crêtes, si elle ne l'est pas déjà. Expérimentalement,  $\alpha$  doit être compris

entre 0,5 et 4.

**Ré-échantillonnage et suppression des branches (l. 13 à 29 de l'Algorithme 1)** Comme le contour décrit en Section 2.1, le squelette déformable est ré-échantillonné après chaque itération d'évolution, de manière à maintenir un espacement régulier entre les sommets. Pour chaque paire de sommets adjacents  $(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)$ , le ré-échantillonnage vise à ce que la condition  $c \leq \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\| \leq 2c$  soit vérifiée (nous avons choisi  $c = 2$ ). Si la distance entre deux sommets adjacents excède  $2c$ , un point de branche est créé entre les deux, quel que soit le degré des deux sommets. A l'inverse, si la distance entre deux sommets adjacents est inférieure à  $c$ , les degrés sont vérifiés. Si les deux sommets sont des points de branche, ils sont fusionnés, la nouvelle position étant le milieu des deux anciens sommets. Si l'un des sommets est terminal, il est supprimé. Ceci est en accord avec l'*a priori* que nous avons sur les déformations des crêtes de la carte de distance. En effet, au fur et à mesure des lissages, les crêtes de la carte de distance (et les branches de squelette correspondantes) sont obligatoirement raccourcies, quand elles ne sont pas supprimées. Le dernier cas concerne les points de jonction. Si l'un des sommets est un point de jonction et l'autre un point de branche, ce dernier est éloigné du premier de manière à ce qu'ils deviennent distants de  $c$ . Si les deux sommets sont des points de jonction, ils sont laissés tels quels.

Comme les crêtes sont raccourcies lorsque le contour est lissé, les sommets peuvent se retrouver au delà des extrémités d'une crête, ce qui implique que la branche correspondante doit être raccourcie également. Pour ce faire, nous nous basons sur un critère de la méthode DECS [9], dans laquelle seuls les points  $\mathbf{q}$  ayant une valeur de crête ( $rdg(\mathbf{q})$ ) supérieure au seuil  $th_{ridge-low}$  sont conservés comme points de squelette candidats. De la même manière, si la valeur de crête d'un point terminal est en dessous de  $th_{ridge-low}$ , nous supprimons celui-ci.

**Propagation des étiquettes** Lorsqu'un sommet terminal  $\mathbf{r}$  est supprimé, soit par ré-échantillonnage soit par élimination des points non-crête, le degré de son sommet adjacent est vérifié. S'il est supérieur à 2, la branche se terminant en  $\mathbf{r}$  disparaît. De plus, si le degré est égal à 2 après suppression de  $\mathbf{r}$ , les deux branches partant du sommet adjacent n'en forment plus qu'une. Pour permettre la construction du squelette hiérarchique, les étiquettes des branches du squelette initial  $S_{\mathcal{F}(0)}$  sont en partie stockées dans les branches du squelette courant. Les arêtes de la même branche devant avoir les mêmes étiquettes, une propagation des étiquettes est effectuée, comme illustré en Figure 7. Les étiquettes des deux anciennes branches sont ajoutées aux arêtes de la branche fusionnée. On notera qu'une branche peut contenir un nombre arbitraire d'étiquettes.

**Création du squelette hiérarchique (Algorithme 2)** Un exemple présentant les étapes critiques lors du processus de déformation du squelette est présenté sur la Figure 9. Chaque branche  $b$  est étiquetée avec une séquence de branches de  $S_{\mathcal{F}(0)}$ , appelée une métabranche, correspondant à  $b$  dans  $S_{\mathcal{F}(0)}$ .

---

**Algorithme 1 : Pseudocode du squelette déformable.**

---

```

1  Entrée :  $S_{\mathcal{F}(\lambda)}$ , Sortie :  $S_{\mathcal{F}(\lambda+1)}$ 
2  début
3       $S_{\mathcal{F}(\lambda+1)} := S_{\mathcal{F}(\lambda)}$ 
4      tant que  $S_{\mathcal{F}(\lambda+1)}$  n'est pas stable faire
5          /*Déformation discrète*/
6          pour tous les sommets  $\mathbf{q}_i$  de  $S_{\mathcal{F}(\lambda+1)}$  faire
7              Calculer  $\mathbf{r}_i$  et  $\mathbf{f}_i$  selon les équations (6) et (7)
8               $\mathbf{m}_i = \alpha \mathbf{r}_i + \mathbf{f}_i$ 
9          fin
10         pour tous les sommets  $\mathbf{q}_i$  de  $S_{\mathcal{F}(\lambda+1)}$  faire
11              $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_i + \Delta t \mathbf{m}_i$ 
12         fin
13         /*Ré-échantillonnage*/
14         pour tous les sommets  $\mathbf{q}_i$  de  $S_{\mathcal{F}(\lambda+1)}$  faire
15             pour tous les  $j \in \eta_i$  faire
16                 si  $d(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) > 2c$  alors
17                     Ajouter un sommet entre  $\mathbf{q}_i$  et  $\mathbf{q}_j$ 
18                 sinon si  $d(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) < c$  alors
19                     si  $|\eta_i| = 1$  alors
20                         Supprimer  $\mathbf{q}_i$ 
21                     sinon si  $|\eta_i| = 2$  et  $|\eta_j| = 2$  alors
22                         Fusionner  $\mathbf{q}_i$  et  $\mathbf{q}_j$ 
23                     sinon si  $|\eta_i| = 2$  et  $|\eta_j| > 2$  alors
24                         Eloigner  $\mathbf{q}_i$  à une distance  $c$  de  $\mathbf{q}_j$ 
25                     fin
26             fin
27         fin
28     fin
29     pour tous les
30         sommets terminaux  $\mathbf{q}_t$  de  $S_{\mathcal{F}(\lambda+1)}$  faire
31             si  $|\eta_t| = 1$  et  $rdg(\mathbf{q}_t) < th_{ridge-low}$  alors
32                 Supprimer  $\mathbf{q}_t$ 
33             fin
34     fin
35     retourner  $S_{\mathcal{F}(\lambda+1)}$ 
36 fin

```

---

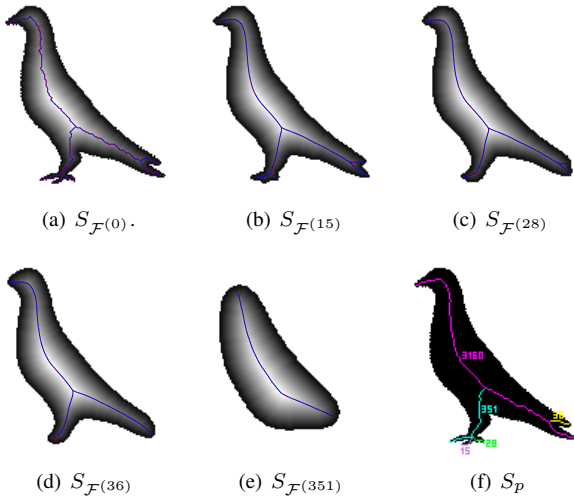


FIGURE 9 – Exemple montrant les étapes critiques du squelette déformable et du squelette hiérarchique associé. Les labels des métabranches sont les nombres de lissages nécessaires pour supprimer les métabranches.

À la fin de cette étape, une séquence de squelettes déformables  $h(S)$ , comprenant toutes les étapes du squelette déformable calculé sur une forme lissée entre zéro et  $n_{smooth\_max}$  fois, est obtenue pour représenter l'évolution du squelette d'origine, plus formellement,  $h(S) = (S_{\mathcal{F}(\lambda)})_{\lambda \in [0; n_{smooth\_max}]}$ . Le squelette hiérarchique  $S_p$  est obtenu à partir de l'Algorithme 2. Un exemple est présenté sur la Figure 9(f). Les poids sont ensuite normalisés entre 0 et 1.

---

**Algorithme 2** : Pseudocode de la création de  $S_p$ .

---

**Entrées** :  $h(S) = (S_{\mathcal{F}(\lambda)})_{\lambda \in [0; n_{smooth\_max}]}$

**Sorties** :  $S_p$

```

1 début
2   pour  $\lambda$  allant de  $n_{smooth\_max}$  à 0 faire
3     pour tous les branches  $b$  de  $S_{\mathcal{F}(\lambda)}$  faire
4       si  $b.métabranche \notin S_p$  alors
5         Ajouter  $b.métabranche$  à  $S_p$ 
6          $w_{b.métabranche} := \lambda + 1$ 
7       fin
8     fin
9   fin
10  retourner  $S_p$ 
11 fin

```

---

### 3 Résultats

D'une part, nous testons la stabilité sous transformations affines. Nous avons observé que le squelette obtenu avec DECS [9] est stable sous ces transformations. Le squelette déformable est également stable sous rotation. La Figure 10 montre deux formes identiques, où la seconde a subi une rotation de 45 degrés. Nous avons testé notre méthode à différentes résolutions sur une même forme. Un exemple est montré sur la Figure 11. En raison des artefacts de discrétisation à basse échelle, des détails peuvent

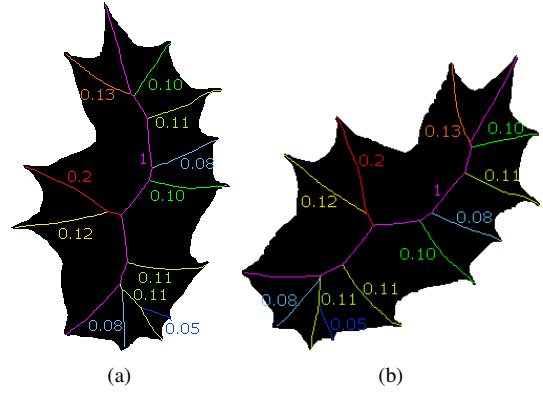


FIGURE 10 – (a) Squelette hiérarchique d'une feuille de houx, (b) Squelette hiérarchique de la même feuille de houx avec une rotation de 45 degrés.

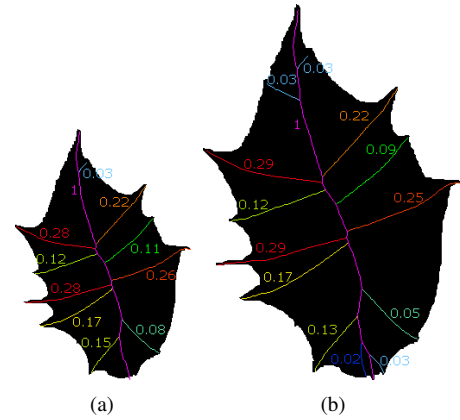


FIGURE 11 – Squelette hiérarchique d'une feuille de houx ayant pour résolution  $203 \times 291$  (a),  $304 \times 436$  (b).

être ignorés. Ainsi, le squelette hiérarchique n'est pas nécessairement invariant au changement d'échelle. En effet, lorsque l'échelle augmente, des petits détails du bord peuvent générer des métabranches supplémentaires non présentes à basse échelle. Néanmoins, l'intérêt de notre méthode est que ces métabranches supplémentaires ont un poids minime, proche de zéro. C'est, par exemple, le cas de la branche bleue foncée sur la Figure 11(b). Une caractéristique intéressante de notre méthode est que les métabranches importantes à basse échelle sont les mêmes à plus haute échelle, et leurs poids sont du même ordre de grandeur, comme les branches rouge et fuschia sur la Figure 11(b).

D'autre part, comme les poids quantifient l'importance des branches, le seuillage par rapport au poids permet d'élaguer naturellement le squelette. Grâce à un seuil  $0 \leq \sigma \leq 1$ , nous sélectionnons les métabranches importantes et obtenons un squelette pertinent. Notre méthode est applicable sur n'importe quelle autre méthode de squelettisation. En effet,  $S_{\mathcal{F}(0)}$  n'est pas nécessairement obtenu grâce à DECS, et peut être remplacé par un squelette issu d'un autre algorithme. La Figure 12 montre un exemple d'élagage de squelette obtenu avec l'algorithme de Bertrand et Couprie [3] sur une image très bruitée (nous avons utilisé  $\sigma = 0.3$ ).

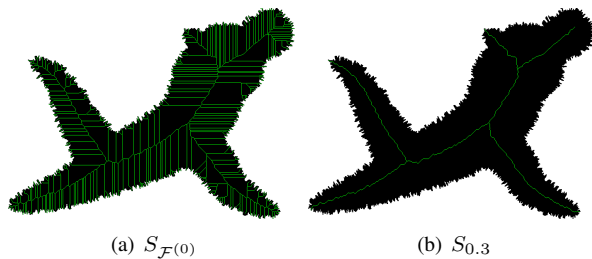


FIGURE 12 – Exemple de notre méthode d'élagage appliquée sur un squelette de Bertrand et Couprie [3].

## 4 Conclusion et perspectives

Notre but est de créer un descripteur de forme, le squelette hiérarchique, qui puisse réduire la complexité de l'appariement de squelettes en conservant les propriétés de stabilité sous les transformations géométriques. Pour ce faire, nous avons proposé la construction d'un squelette hiérarchique basée sur les lissages successifs de la forme d'origine pour réduire les détails étape par étape. Comme le lissage supprime progressivement les détails, la longueur des branches de squelette décroît graduellement jusqu'à la disparition des branches. En pratique, nous ne calculons pas un squelette à chaque étape mais nous déformons le squelette d'origine petit à petit. Nous quantifions l'importance des branches en utilisant une échelle de disparition normalisée, qui a l'avantage d'être stable pour des tailles d'images différentes.

Mise à part le fait que notre squelette hiérarchique puisse être utilisé pour appairer des formes, nous avons également montré qu'il pouvait être utilisé pour élaguer n'importe quel type de squelette.

Ce travail est une partie du processus de reconnaissance de formes et plus spécifiquement de reconnaissance de feuilles d'arbre. Nous planifions donc d'utiliser ce squelette hiérarchique afin de faire de l'appariement de formes. De plus, un de nos travaux à venir sera d'inclure une extension pour les formes non-simplement connexes.

## Références

- [1] D. Attali, G. Sanniti di Baja, et E. Thiel, "Pruning discrete and semicontinuous skeletons," in *Image Analysis and Processing*. Springer, 1995, pp. 488–493.
- [2] X. Bai, L. Jan Latecki, et W. Liu, "Skeleton pruning by contour partitioning with discrete curve evolution," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 29, no. 3, pp. 449–462, 2007.
- [3] G. Bertrand et M. Couprie, "Powerful parallel and symmetric 3d thinning schemes based on critical kernels," *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 48, no. 1, pp. 134–148, 2014.
- [4] F. Chazal, et A. Lieutier, The  $\lambda$ -medial axis. *Graphical Models*, vol. 67, no. 4, pp. 304–331, 2005.
- [5] P. Dimitrov, C. Phillips, et K. Siddiqi, "Robust and efficient skeletal graphs," in *Computer Vision and Pattern Recognition, 2000. Proceedings. IEEE Conference on*. IEEE, 2000, vol. 1, pp. 417–423.
- [6] M. Gage, On an area-preserving evolution equation for plane curves, *Contemporary Mathematics* 51, 1986, pp. 51–62.
- [7] M. Kass, A. Witkin et D. Terzopoulos, Snakes : Active Contour Models, *International journal of computer vision*, 1988, vol. 1(4), pp. 321–331.
- [8] B. Kimia et K. Siddiqi, Geometric heat equation and nonlinear diffusion of shapes and images, *Computer Vision and Image Understanding* 64 (1996) 305–322.
- [9] A. Leborgne, J. Mille, et L. Tougne, "Noise-resistant digital euclidean connected skeleton for graph-based shape matching," *Journal of Visual Communication and Image Representation*, vol. 31, pp. 165–176, 2015.
- [10] HZ. Liu, Z. Wu, D.F. Hsu, B.S. Peterson, et D. Xu, "On the generation and pruning of skeletons using generalized voronoi diagrams," *Pattern Recognition Letters*, vol. 33, no. 16, pp. 2113–2119, 2012.
- [11] H. Liu, Z.-H. Wu, X. Zhang, et D.F. Hsu, "A skeleton pruning algorithm based on information fusion," *Pattern Recognition Letters*, vol. 34, no. 10, pp. 1138–1145, 2013
- [12] A. Solís Montero, et J. Lang, "Skeleton pruning by contour approximation and the integer medial axis transform," *Computers & Graphics*, vol. 36, no. 5, pp. 477–487, 2012.
- [13] R.L. Ogniewicz, et O. Kübler, "Hierarchic voronoi skeletons," *Pattern recognition*, vol. 28, no. 3, pp. 343–359, 1995.
- [14] J.-S. Park, D.H. Chang, "A hierarchical skeleton-based shape description," *KSPC*, vol. 99, pp. 597–600, 1999.
- [15] T.B. Sebastian et B. B. Kimia, "Curves vs skeletons in object recognition," in *Image Processing, 2001. Proceedings. 2001 International Conference on*. IEEE, 2001, vol. 3, pp. 22–25.
- [16] L. Serino et G. Sanniti di Baja, "A new strategy for skeleton pruning," *Pattern Recognition Letters*, 2015.
- [17] D. Shaked et A. M. Bruckstein, "The curve axis," *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 63, no. 2, pp. 367–379, 1996.
- [18] W. Shen, X. Bai, R. Hu, H. Wang, et L.J. Latecki, "Skeleton growing and pruning with bending potential ratio," *Pattern Recognition*, vol. 44, no. 2, pp. 196–209, 2011.
- [19] R. Veltkamp et M. Hagedoorn, "State of the art in shape matching," *Principles of visual information retrieval*, p. 87, 2001.
- [20] C. Yang, O. Tiebe, K. Shirahama, et M. Grzegorzec "Object Matching with Hierarchical Skeletons," *Pattern Recognition*, 2016.